
Theorie und Numerik interlaminarer Spannungen und Delaminationen in geschichteten Verbundschalen

Vom Fachbereich Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Gregor Knust
aus Karlsruhe

Erstreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. F. Gruttmann

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

Tag der Einreichung: 16.01.2019

Tag der mündlichen Prüfung: 22.03.2019

Darmstadt 2019

D 17

Knust, Gregor:

Theorie und Numerik interlaminarer Spannungen und Delaminationen in geschichteten Verbundschalen

Darmstadt, Technische Universität Darmstadt

Tag der mündlichen Prüfung: 22.03.2019

Jahr der Veröffentlichung auf TUpriints: 2019



Veröffentlicht unter CC BY-NC-ND 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Fachgebiet Festkörpermechanik der TU Darmstadt. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die einen Beitrag zum Gelingen der Arbeit geleistet haben.

Meinen besonderen Dank möchte ich Prof. Dr.-Ing. Friedrich Gruttmann für die Betreuung meiner Arbeit, der fortwährenden Unterstützung und Hilfe während meiner Zeit am Fachgebiet, aussprechen. Weiterhin bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Werner Wagner für die Übernahme des Korreferats, das Interesse an meiner Arbeit und die damit verbundenen hilfreichen Anmerkungen.

Des Weiteren bedanke ich mich bei meinen Arbeitskollegen für die schöne gemeinsame Zeit am Fachgebiet, die fachlichen und auch fachfremden Diskussionen. Besonderer Dank gilt hierbei Thomas Blome, Maximilian Müller, Florian Niederhöfer, Özer Üngör und Jan Zoller. Darüber hinaus gilt mein großer Dank meinem Kollegen Simon Klarmann, der mir mit seinem umfangreichen Wissen im Bereich der FEM eine große Hilfe war. Ebenfalls danke ich Angelika Prießnigg, die mir stets bei Problemen weitergeholfen und viel zur guten Arbeitsatmosphäre beigetragen hat.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie für die Unterstützung bedanken. Insbesondere meiner Frau Natascha danke ich für die Geduld und den Rückhalt, den sie mir gegeben hat.

Darmstadt, 2019

Gregor Knust

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	1
Abstract	3
1 Einleitung	5
1.1 Motivation	5
1.2 Stand der Forschung	7
1.3 Gliederung der Arbeit	10
2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	13
2.1 Kinematik	14
2.2 Deformationen und Verzerrungsmaße	17
2.3 Spannungen	20
2.4 Bilanz- und Erhaltungssätze	23
2.4.1 Massenbilanz	23
2.4.2 Impulsbilanz	24
2.4.3 Drehimpulsbilanz	25
2.4.4 Energiebilanz	25
2.5 Materialgleichungen	27
2.5.1 Hyperelastisches Materialverhalten	27
2.5.2 Transversale Isotropie	31
2.5.3 Linearelastisches transversal-isotropes Materialmodell . . .	33
2.5.4 Plastisches Materialverhalten bei kleinen Verzerrungen . . .	39
2.6 Schwache Form und deren Linearisierung	41
2.6.1 Linearisierung	44
2.6.2 Mehrfeldfunktionale	45
2.7 Schädigung	47
2.7.1 Grundlagen der Schädigungsmechanik	47
2.7.2 Isotropes Schädigungsmodell	50

3	Nichtlineare Schalentheorie	53
3.1	Schalen	53
3.2	Schalenkinematik	55
3.3	Schalenverzerrungen	59
3.4	Verwölbungen und Dickenänderungen	61
3.5	Spannungen und Schnittgrößen	65
3.6	Prinzip der virtuellen Arbeit und Gleichgewichtsbedingungen . . .	66
3.6.1	Variation der Schalenverzerrungen	67
3.6.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	68
3.6.3	Gleichgewicht der Spannungen und eine Nebenbedingung .	71
3.6.4	Schwache Form der gemischten Formulierung	77
3.6.5	Linearisierung der schwachen Form	79
4	Finite-Element-Formulierung	83
4.1	Approximation der Schalengeometrie	84
4.2	Interpolation der unabhängigen Schnittgrößen	93
4.3	Interpolation der unabhängigen Verzerrungen und Verzerrungsableitungen	94
4.4	Approximation des Prinzips der virtuellen Arbeit	97
4.5	Numerische Umsetzung des Schädigungsmodells	100
5	Numerische Beispiele	105
5.1	Patch-Test	105
5.2	Isotrope Platte mit konstanter Flächenlast: Analytische Lösung für Spannungen in Dickenrichtung	107
5.3	Laminat unter Gleichlast	109
5.3.1	Laminat mit $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Schichtung	111
5.3.2	Unsymmetrisches Laminat mit $[0^\circ/90^\circ]$ -Schichtung	114
5.3.3	Winkelverbund mit $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ -Schichtung . . .	116
5.3.4	Winkelverbund mit 20 Schichten	118
5.3.5	Zusammenfassung: Laminat-Beispiele	118
5.4	Eingespannter Zylinderabschnitt	120
5.5	Sandwichprofile	122
5.5.1	Stabilitätsanalyse	123
5.5.2	Elasto-plastische Berechnung	125
5.6	3-Punkt-Biegeversuch	130
5.6.1	3-Punkt-Biegeversuch ohne Anfangsdelamination	130

5.6.2	3-Punkt-Biegeversuch mit Anfangsdelamination	135
5.7	L-Profil	140
5.8	Ausgesteifte Zylinderschale	145
5.8.1	Elastische Analyse	146
5.8.2	Bestimmung der Resttragfähigkeit infolge Delamination . .	149
6	Zusammenfassung und Ausblick	155
	Nomenklatur	159
	Literaturverzeichnis	165

Kurzfassung

Aufgrund ihrer mechanischen Eigenschaften ersetzen Verbundwerkstoffe zunehmend klassische metallische Materialien. Aus diesem Grund stellt die Simulation von faserverstärkten Kunststoffen durch numerische Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode ein stetig wachsendes Forschungsfeld dar. Diese Arbeit liefert einen Beitrag zur Modellierung dieser Materialien. Es wird ein Schalenelement zur Berechnung von geschichteten Strukturen vorgestellt, das auf einem Mehrfeld-funktional basiert. Das Verschiebungsfeld beinhaltet neben den Anteilen aus der Reissner-Mindlin-Theorie zusätzliche Verwölbungen und Verschiebungen senkrecht zur Schalenfläche. Durch diese Größen ist es möglich, interlaminare Schub- und Normalspannungen zu bestimmen. Die Verwölbungen und die Verschiebungen in Dickenrichtung der Schale werden in den lokalen Gleichgewichtsbeziehungen berücksichtigt. Somit ist die Anwendung auf physikalisch und geometrisch nichtlinearer Probleme möglich. Eine Nebenbedingung erzwingt den korrekten Verlauf des erweiterten Verschiebungsfeldes. Aus statischer Kondensation resultiert ein gemischtes 4-Knoten-Schalenelement mit den Standard-Verschiebungsfreiheitsgraden. Dies ermöglicht die Anwendung der Schalenformulierung auf komplexe Geometrien. Innerhalb des Laminats kann an beliebiger Stelle eine Zwischenschicht zur Abbildung von Delamination platziert werden. Ein isotropes Schädigungsmodell für kleine Verzerrungen wird in dieser Zwischenschicht für die Bestimmung von Delaminationen verwendet. Anhand mehrerer numerischer Beispiele wird unter anderem der Vorteil gegenüber der Verwendung von Volumenschalenelementen in Bezug auf die Rechenzeit verdeutlicht. Daneben werden die Berechnung interlaminarer Spannungen verschiedener Laminats, ein 3-Punkt-Biegeversuch unter Berücksichtigung von Delamination und eine Reihe weiterer Beispiele gezeigt.

Abstract

Fibre-reinforced plastics are increasingly replacing classic metallic materials. The simulation of fibre-reinforced plastics with numerical methods such as the Finite-Element-Method is subject of extensive research work. In this thesis a contribution to the modeling of these materials is presented. A shell element for the computation of layered structures based on a multi-field formulation is introduced. The displacement field resulting from the Reissner-Mindlin shell kinematics is enriched with warping and relative thickness displacements. With these quantities, interlaminar shear stresses and thickness normal stresses can be computed. The additional displacements are variationally embedded in the equilibrium equations. Therefore arbitrary nonlinear material models can be applied. The basic equations include a constraint which enforces the correct shape of the superposed displacement field through the thickness. Static condensation leads to a 4-node mixed hybrid shell element with the usual 5 or 6 nodal degrees of freedom. Thus the resulting element formulation is applicable to complex geometries such as shell intersection problems. For the simulation of delamination a thin intermediate layer can be placed at an arbitrary position in the laminate. To account for delamination, a small strain isotropic damage model is applied to this layer. Several numerical examples illustrate the properties of the shell formulation and its advantages compared to solid or solid shell elements. Furthermore the results for the interlaminar stresses of different lay-ups are discussed. Regarding the simulation of delaminations, a three point bending experiment and other examples are presented.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Der Einsatz von Materialien mit Leichtbaupotential gewinnt durch neue gesetzliche Vorgaben hinsichtlich des Emissionsausstoßes zunehmend an Bedeutung. Dabei spielen faserverstärkte Kunststoffe eine immer größere Rolle. Sie ermöglichen hohe Festigkeiten und Steifigkeiten bei gleichzeitiger geringer Dichte. Aus diesem Grund ersetzen sie beispielsweise im Automobilbau vermehrt metallische Werkstoffe. Die Übersicht über die Menge an verarbeiteten kohlefaserverstärkten Kunststoffen in der Automobilindustrie in Europa in Abb. 1.1 zeigt einen starken Anstieg. Dieser Trend wird sich laut Prognosen weiter fortsetzen.

Neben dem Automobilbau werden faserverstärkte Kunststoffe in anderen Bereichen, wie der Luft- und Raumfahrt oder in der Sport- und Freizeitindustrie, eingesetzt. Auch für den Bau von Windkraftanlagen werden faserverstärkte Kunststoffe verwendet, vornehmlich für die Herstellung der Rotoren.

Darüber hinaus findet diese Materialgruppe Anwendung im Bauwesen, beispielsweise als Verstärkungen für bestehende Brückenbauwerke oder Säulen von Gebäuden in erdbebengefährdeten Gebieten. Auch kleinere Brückenbauwerke können mit faserverstärkten Kunststoffen realisiert werden. Bauwerke dieser Art zeichnen sich durch eine hohe Korrosionsbeständigkeit und eine geringe Anfälligkeit gegenüber Schwingungen aus.

Faserverstärkte Kunststoffe bestehen aus Fasern, die in einer Matrix eingebettet sind. Hierbei sind unterschiedliche Materialkombinationen möglich. Meist werden

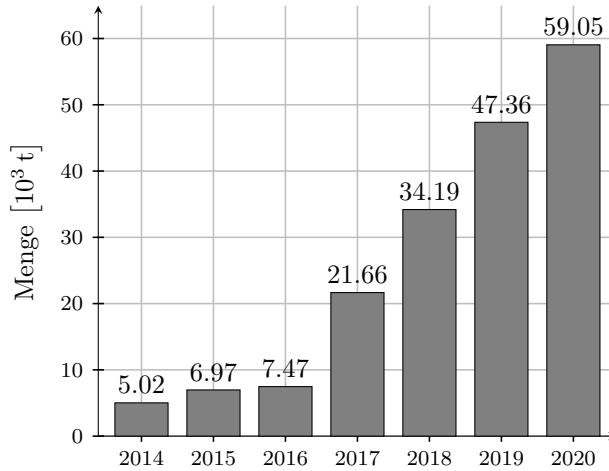


Abbildung 1.1: Verarbeitete Menge karbonfaserverstärkter Kunststoffe für den Automobilbau in Europa in den Jahren 2014 bis 2020 ¹

Glas- oder Kohlefasern in Epoxidharze oder thermoplastische Kunststoffe eingebettet. Dabei wird zwischen Kurz-, Lang- und Endlosfasern unterschieden. Aus Endlosfasern hergestellte Bauteile bestehen entweder aus Geweben oder unidirektionalen Schichten (UD-Schichten), die zu Laminaten, also zu einem Schichtverbund, zusammengefügt werden. Somit sind verschiedene Faserorientierungen innerhalb des Laminats realisierbar.

Da faserverstärkte Kunststoffe über eine sehr hohe Steifigkeit verfügen, tritt ihr Versagen meist plötzlich und ohne Vorankündigung durch Deformationen ein. Daher ist es erforderlich, beim Einsatz faserverstärkter Kunststoffe als tragende Strukturteile, die Versagensmechanismen zu kennen. Hierbei wird zwischen intra- und interlaminarem Versagen unterschieden. Intralaminar bedeutet, dass die Entfestigung in einer Schicht stattfindet. Dies kann beispielsweise durch den Bruch der Fasern oder das Versagen der Matrix eintreten. Interlaminare Versagen findet in erster Linie durch Delamination statt. Damit ist das voneinander Ablösen zweier Schichten gemeint. Delamination wird meist durch Schubkräfte, die in der Laminatenebene, oder Normalkräfte, die senkrecht zur Laminatenebene wirken, verursacht. Diese Spannungen, die durch die Dicke der Lamine auftreten, werden als interla-

¹Verarbeitete Menge Carbonfaserverstärkter Kunststoffe für den Automobilbau in Europa in den Jahren 2014 bis 2020 (in 1.000 Tonnen). Statista. Zugriff am 4. Januar 2019. de.statista.com/statistik/daten/studie/660175/umfrage/menge-der-carbonverstaerkter-kunststoffe-fuer-den-automobilbau-in-europa/.

minare Spannungen bezeichnet. Da Delamination das Tragverhalten von faserverstärkten Kunststoffen beeinflusst und die Resttragfähigkeit stark vermindert, ist es wichtig, die Größe der interlaminaren Spannungen vorab zu bestimmen. Eine Möglichkeit hierfür bieten numerische Berechnungsverfahren wie die Finte-Elemente-Methode. Daher wird in dieser Arbeit eine Methode vorgestellt, die interlaminaren Spannungen mit einem Schalenelement mittels der Finiten-Elemente-Methode zu berechnen.

1.2 Stand der Forschung

In dieser Arbeit werden interlaminare Spannungen in Laminaten und daraus resultierende Schädigungen durch Delamination untersucht. Da Bauteile aus faserverstärkten Kunststoffen meist eine schalenartige Struktur aufweisen, wird hierfür ein Schalenelement verwendet.

Schalenelemente stellen seit geraumer Zeit eine effiziente Möglichkeit zur numerischen Simulation von dünnwandigen Strukturen dar. Auf die geschichtliche Entwicklung von Schalenelementen in der Finiten-Elemente-Methode wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen. Die Schalenformulierung in dieser Arbeit basiert auf dem sogenannten *geometrisch exakten Schalenmodell* nach [93] und [94]. Für einen Überblick über die verschiedenen kinematischen Annahmen und deren Auswirkungen in Bezug auf Schalenelemente wird auf [12] verwiesen.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Berechnung interlaminarer Spannungen. Eine Möglichkeit zur Bestimmung dieser Spannungen liefern Volumen- oder Volumenschalen-Elemente, wie sie z.B. in [51, 52] und [64] vorgeschlagen werden. Diese Elemente bilden einen vollständigen dreidimensionalen Spannungszustand ab. Für die Berechnung von Laminaten ist es jedoch notwendig, jede Schicht mit mehreren Elementen in Dickenrichtung zu diskretisieren. Dies führt in Hinblick auf Lamine mit einer Vielzahl von Einzellagen zu einem enormen Rechenaufwand.

Schichtweise Formulierungen stellen eine weitere Möglichkeit für die Bestimmung interlaminarer Spannungszustände dar. Die *Zick-Zack-Theorie*, wie sie in [14, 18, 21] und [55] gezeigt wird, beschreibt die Verschiebungen in Dickenrichtung mit abschnittsweise definierten Polynomen. Das somit erweiterte Verschiebungsfeld liefert interlaminare Spannungen. Die damit verbundenen zusätzlichen Freiheitsgrade füh-

ren jedoch zu einem Anstieg der Anzahl der zu lösenden Gleichungen unabhängig von der Schichtung. Eine Zusammenfassung zur Entwicklung der *Zick-Zack-Theorie* ist in [19] zu finden.

Schalentheorien höherer Ordnung und schichtweise Elementformulierungen sind weitere Methoden zur Bestimmung von interlaminaren Spannungen, beispielsweise in [39, 86] und [116] für Platten sowie in [20] und [59] für Schalen. In [79] wird ein parabolischer Verlauf der Querschubverzerrungen angenommen. Geometrisch nichtlineare Schalentheorien höherer Ordnung sind in [31, 32, 38, 56] und [78] dargestellt.

Post-Processing-Methoden, bei denen eine Auswertung der Gleichgewichtsbeziehungen in Nachlaufrechnungen durchgeführt wird, werden in [87] und [91] vorgeschlagen. Für dicke Platten ist dieses Vorgehen in [22] gezeigt. Diese Methode birgt den Nachteil, dass die interlaminaren Spannungen nicht in die Variationsformulierung eingebunden sind. Eine Erweiterung auf geometrisch oder physikalisch nichtlineares Materialverhalten ist somit nicht ohne Weiteres möglich. Ein *Prädiktor-Korrektor-Verfahren* ist in [69] aufgezeigt. In [70] werden interlaminare Schubspannungen durch abschnittsweise Integration der dreidimensionalen Gleichgewichtsgleichungen in Dickenrichtung bestimmt. Die Rückrechnung von interlaminaren Spannungen mit Volumenelementen wird in [26] beschrieben.

Neben den bereits erwähnten Volumen-(Schalen-)Elementen, ist es durch Multiskalenansätze möglich, einen dreidimensionalen Spannungszustand auszuwerten. Ein Beispiel hierfür ist die FE^2 -Methode, wie sie z.B. in [23] und [36] gezeigt wird. Hierbei wird die Makroebene mit Schalenelementen diskretisiert. Auf Mikroebene wird das Material an den Integrationspunkten durch sogenannte *Repräsentative Volumenelemente* (RVE) abgebildet. Diese erstrecken sich für dünne Strukturen meist über die gesamte Höhe der Schale. Den RVE können beliebige Materialien und Schichtfolgen zugewiesen werden. Des Weiteren gelten an Ober- und Unterseite des RVEs Spannungsrandbedingungen. An den Längsseiten müssen die Randbedingungen der *Hill-Mandel-Bedingung* genügen. Dabei ist es notwendig, zu überprüfen, ob bestimmte Deformationsmoden des RVEs behindert werden [36]. Daneben ist die FE^2 -Methode mit großem numerischem Aufwand verbunden, insbesondere für Lamine mit vielen Schichten.

Bezüglich der Simulation von Delamination als Folge der auftretenden interlaminaren Spannungen existieren ebenfalls eine Reihe unterschiedlicher Ansätze. Mit Hilfe

der *Virtuellen Riss-Schließungs-Technik* (VCCT) wird die Energiefreisetzungsrate infolge von Risswachstum bestimmt, siehe [57] und [88]. Dabei gilt die Annahme, dass die Energie, die zur Separierung zweier Schichten benötigt wird, der Energie entspricht, die für die Risssschließung aufgewendet werden muss. Die so bestimmte Energiefreisetzungsrate wird anschließend mit der kritischen Energiefreisetzungsrate verglichen. Für diese Methode müssen jedoch Annahmen über Anzahl, Ort und Größe der vorhandenen Risse getroffen werden. Sie eignet sich daher vorwiegend für die Abschätzung des Tragverhaltens infolge bestehender Risse oder Delaminationen.

Eine große Gruppe zur Berechnung von Delamination stellen *Interface-* bzw. *Kohäsiv-Elemente* dar, siehe beispielsweise [1, 3, 5, 8, 16, 17, 29, 65, 80, 89, 100, 101, 103] und [112]. Diese Elemente bilden im Zusammenhang mit Laminaten dünne Harz- oder Matrixschichten zwischen zwei Lagen des Laminats nach. Innerhalb dieser Zwischenschicht werden die Schädigungseffekte berechnet. Die *Interface-Elemente* können an beliebigen Stellen innerhalb des Laminats platziert werden, wodurch auch komplexe Delaminationsverläufe abgebildet werden können. Auch ist die Wahl des Schädigungsmodells keinen Einschränkungen unterworfen. Netzabhängigkeit der Ergebnisse ist jedoch ein häufiges Problem bei der Verwendung von *Kohäsiv-Elementen*. Daneben ist es durch die Einführung dieser Zwischenschichten notwendig, zusätzliche numerische Parameter wie die Steifigkeit dieser Zwischenschichten zu definieren.

Darüber hinaus ist es möglich, Delamination mit einem Kontinuumschädigungsmodell innerhalb der einzelnen Schichten abzubilden. In [95] und [96] wird dies für ein Volumenschalenelement durchgeführt. Durch das dreidimensionale Schädigungsmodell wird sowohl intralaminare Versagen als auch Delamination abgebildet. Durch die Verwendung von EAS- und ANS-Ansätzen werden in [98] mögliche Versteifungseffekte umgangen. Eine dünne Zwischenschicht mit einem Schädigungsmodell oder einem Materialmodell für inelastisches Materialverhalten wird in [2, 27] und [105] vorgeschlagen.

Die Erweiterung der Kinematik von Volumenschalenelementen zur Abbildung von Diskontinuitäten wird in [13] und [85] durchgeführt. Damit ist es möglich, den Sprung im Verschiebungsfeld infolge Delamination abzubilden. Eine Anwendung auf Schalenelemente ist in [60] gezeigt.

Im Zuge der sogenannten *Extended Finite Element Method* (XFEM) [110,111] wird der Riss- oder Delaminationsfortschritt mit zusätzlichen Freiheitsgraden an der Rissfront beschrieben. Dabei können sich Risse auch durch Elemente ausbreiten. Netzverfeinerungen können somit beschränkt werden [102]. Durch die XFEM können neben interlaminaren auch intralaminare Schädigungen wie Matrixbruch beschrieben werden [43]. Auch die Interaktion zwischen beiden Versagensarten kann durch die XFEM abgebildet werden [115]. Die Berücksichtigung der zusätzlichen Freiheitsgrade ist insbesondere bei komplexen Geometrien, mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden.

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen, die in dieser Arbeit Anwendung finden, zusammengefasst. Dabei werden insbesondere die Kinematik des Kontinuums erläutert sowie Tensoren für die Beschreibung der Deformation eingeführt. Die aus einwirkenden Kräften resultierenden Spannungen werden ebenso beschrieben wie mehrere Erhaltungssätze. Diese bilden die Grundlage für Gleichgewichtsbeziehungen. Daneben wird der Zusammenhang zwischen Deformationen und Spannungen in Form von Materialgesetzen gezeigt. Sie umfassen ein hyperelastisches, elasto-plastisches und ein transversal-isotropes Materialgesetz. Variationsprinzipien bilden häufig die Grundlage für die Finite-Elemente-Methode. Daher wird das *Prinzip der virtuellen Arbeit* eingeführt. Eine allgemeinere Form des *Prinzips der virtuellen Arbeit* ist das Variationsfunktional nach *Hu-Washizu*, welches die Grundlage der Elementformulierung bildet. Es wird ebenso, wie auch seine Linearisierung, erläutert. Abschließend werden die mechanischen Grundlagen der Schädigungsmechanik zusammengefasst und ein isotropes Schädigungsmodell für kleine Verzerrungen beschrieben.

Die zugrundeliegende nichtlineare Schalentheorie wird in Kapitel 3 hergeleitet. Hierfür werden die kontinuumsmechanischen Gleichungen auf ein nichtlineares Schalenmodell angewendet. Ebenso werden die Schalenkinematik und die Schalenverzerrungen definiert. Zur Bestimmung der interlaminaren Spannungen wird eine Diskretisierung in Dickenrichtung vorgestellt. Eine Zwischenschicht geringer Dicke wird zur Berechnung der Delamination eingeführt. Durch Gleichgewichtsbeziehungen

gen wird die schwache Form des Randwertproblems mit den zugehörigen Euler-Gleichungen hergeleitet. Die linearisierte schwache Form bildet die Grundlage für die Finite-Elemente-Formulierung.

Die numerische Umsetzung innerhalb der Finiten-Elemente-Methode ist in Kapitel 4 dargelegt. Dabei werden die Approximation der Schallengeometrie und die Interpolation der unabhängigen Größen erläutert. Hierbei werden für die Verschiebungsgrößen, die Schnittgrößen, die Verzerrungen und für die aus der Interpolation in Dickenrichtung resultierenden zusätzlichen Größen geeignete Ansätze gewählt. Das Einsetzen der Ansätze in die schwache Form liefert das zu lösende Gleichungssystem. Durch statische Kondensation folgt ein gemischtes hybrides Schalenelement. Die Delamination wird durch ein isotropes Schädigungsmodell für kleine Verzerrungen abgebildet. Für dieses in Kapitel 2 vorgestellte Schädigungsmodell wird die numerische Umsetzung gezeigt.

In Kapitel 5 wird die Leistungsfähigkeit der Schalenformulierung untersucht. Dabei wird zunächst ein *Patch-Test* durchgeführt, bevor weitere numerische Beispiele berechnet werden. Die interlaminaren Spannungsverläufe von Laminaten unterschiedlicher Schichtung werden mit Referenzlösungen verglichen. Die Simulation eines Sandwich-Plattenstreifens zeigt die Leistungsfähigkeit bezüglich Stabilitätsproblemen und plastischen Materialverhaltens. In weiteren Beispielen wird die Delamination verschiedener Lamine untersucht. Hierzu werden insgesamt drei verschiedene Versuche simuliert. Dabei wird der Einfluss numerischer Parameter evaluiert. Abschließend werden ein geometrisch nichtlineares Problem berechnet und die Resttragfähigkeit einer ausgesteiften Zylinderschale untersucht.

Die Ergebnisse der Arbeit sind in Kapitel 6 zusammengefasst. Außerdem wird ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der bestehenden Schalenformulierung geliefert.

Kapitel 2

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden die allgemeinen kontinuumsmechanischen Grundgleichungen zusammengefasst, die in der Schalentheorie und der Finite-Elemente-Formulierung Anwendung finden. Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Laminaten mittels Schalenelementen sind die Definitionen von Verzerrungen, Spannungen, Kinematik sowie die Beschreibung der Gleichgewichtsbeziehungen in einem dreidimensionalen Kontinuum unerlässlich. Dabei wird an dieser Stelle nicht auf die Kontinuumsmechanik im Ganzen eingegangen. Hierzu wird auf die einschlägige Literatur wie beispielsweise [4, 41] verwiesen. Hinsichtlich der Herleitung von Schalentheorien bietet [68] einen detaillierten Überblick. Dabei werden zu Beginn die Kinematik sowie die Definitionen von Verzerrungen und Spannungen im Kontinuum erläutert. Daran anschließend werden Erhaltungssätze eingeführt, welche Anwendung in der Elementformulierung finden.

In der Kontinuumsmechanik wird ein makroskopischer Körper \mathcal{B} als eine Menge materieller Punkte definiert, welche gleichmäßig und kontinuierlich verteilt sind. Den materiellen Punkten sind dabei physikalische Größen, wie beispielsweise Spannungen, Verschiebungen oder Temperaturen zugeordnet. Der Körper wird in einem dreidimensionalen *euklidischen* Raum zu einem Zeitpunkt $t > 0$ parametrisiert und besitzt den Rand $\partial\mathcal{B}$. Durch die Definition eines Basissystems \mathbf{e}_i mit $i = \{1, 2, 3\}$ als Referenz kann jeder materielle Punkt durch einen Ortsvektor eindeutig und zu jedem Zeitpunkt identifiziert werden.

Im Folgenden sollen Indizes in lateinischen Buchstaben i, j, k die Werte 1 bis 3 und diejenigen in griechischen Buchstaben α, β die Werte 1 bis 2 annehmen. Des Weiteren gelte die Summenkonvention.

2.1 Kinematik

Die Kinematik dient zur Beschreibung der Geometrie, der Bewegung und der Deformation des Körpers \mathcal{B} in Abhängigkeit von der Zeit t . Jeder materielle Punkt χ des Körpers ist im *euklidischen* Raum durch einen Ortsvektor $\mathbf{x}(\chi, t_0)$ beschrieben. Erfolgt dies für den Zeitpunkt $t = t_0$, wird dieser Zustand *Referenzkonfiguration* \mathcal{B}_0 genannt. Die Punkte des Körpers werden dabei durch den Vektor $\mathbf{X}(\chi, t_0)$ ausgedrückt. Für einen Zeitpunkt $t > t_0$ werden die Punkte durch den Vektor $\mathbf{x}(\chi, t)$ in der *Momentankonfiguration* \mathcal{B}_t beschrieben, siehe Abb. 2.1. Die Basissysteme können für beide Konfigurationen verschieden sein, werden jedoch in dieser Arbeit als identisch angenommen.

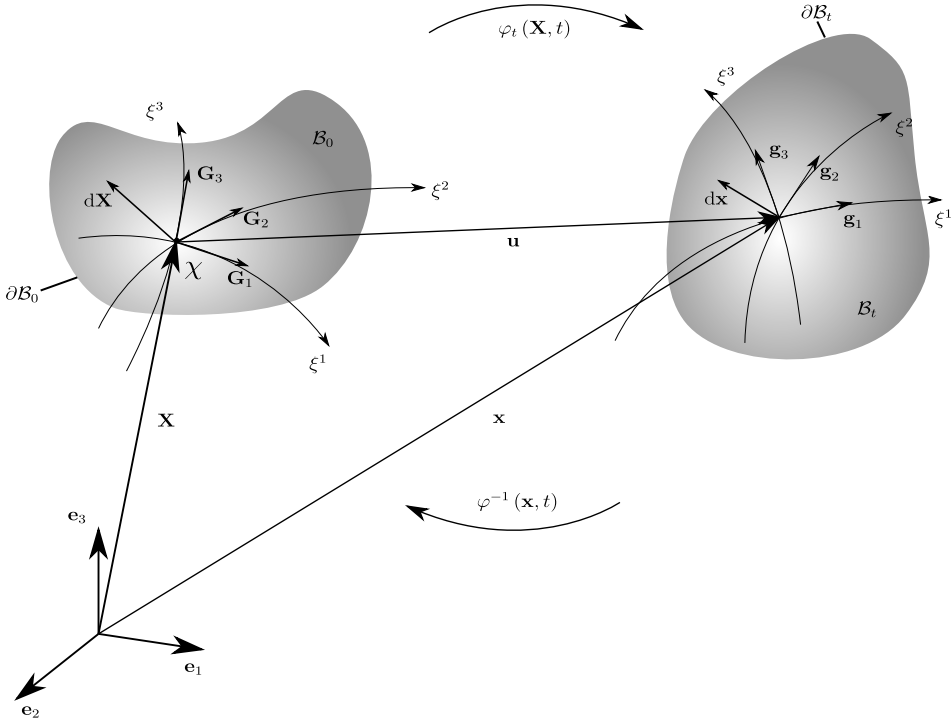


Abbildung 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration mit konvektivem Koordinatensystem ξ^i .

Die Ortskoordinaten in der Referenzkonfiguration werden als *lagrangesche* oder *materielle* Koordinaten bezeichnet, die der Momentankonfiguration entsprechend als *eulersche* oder *räumliche* Koordinaten. Dem folgend existieren in der Kontinuumsmechanik unterschiedliche Beschreibungsweisen der geometrischen und phy-

sikalischen Größen. In der *lagrangeschen* Betrachtung wird ein materieller Punkt anhand seiner materiellen Koordinaten betrachtet. Die *eulersche* Betrachtungsweise beschreibt den Punkt durch seine räumlichen Koordinaten. Im Allgemeinen finden in der Festkörper-Kontinuumsmechanik *lagrangesche* Koordinaten Einsatz. Hinsichtlich der Beschreibung von Fluiden in der Strömungsmechanik wird aufgrund großer Deformationen die *eulersche* Betrachtungsweise gewählt.

Die bijektive Transformation

$$\mathbf{x} = \hat{\varphi}(\mathbf{X}, t) : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t \quad (2.1)$$

wird eingeführt, um eine eindeutige Abbildung des Körpers von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration durchzuführen. Dabei ist $\hat{\varphi}$ eine Funktion der Zeit t und des Ortsvektors \mathbf{X} der Referenzkonfiguration. Das Vektorfeld $\hat{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ wird dabei als die Bewegung des Körpers definiert. Da die bijektive Abbildung $\hat{\varphi}$ invertierbar ist, können mit $\hat{\varphi}^{-1}$ materielle Punkte in der Momentankonfiguration mit

$$\hat{\varphi}^{-1}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{B}_t \rightarrow \mathcal{B}_0 \quad (2.2)$$

auf die Referenzkonfiguration überführt werden. Im Folgenden werden Größen in der Referenzkonfiguration mit Großbuchstaben oder dem Index $(\bullet)_0$ gekennzeichnet, während Größen in der Momentankonfiguration klein geschrieben werden.

Für die Beschreibung der Kinematik von Schalen bietet sich die Verwendung von krummlinigen, sogenannten *konvektiven* Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 an, siehe Abb. 2.1. Diese kann man sich als in den Körper eingeritzte Linien vorstellen, die sich bei einer Deformation des Körpers ebenfalls verformen.

Somit lässt sich jeder materielle Punkt χ durch seine konvektiven Koordinaten ξ^i ausdrücken $\chi(\xi^i)$. Die Ortsvektoren in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration lauten damit

$$\mathbf{X}(\chi(\xi^i, t_0)) = \mathbf{X}(\xi^i, t_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(\chi(\xi^i, t)) = \mathbf{x}(\xi^i, t) \quad . \quad (2.3)$$

Die tangentialen Vektoren der konvektiven Koordinatenlinien bilden ein kovariantes Basissystem, welches durch

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \quad (2.4)$$

in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration definiert ist. Um die Komponenten der Metriktensoren

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, & G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j, \\ g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, & g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (2.5)$$

zu erhalten, wird das Skalarprodukt der zugehörigen ko- und kontravarianten Basisvektoren bestimmt. Hierbei sind die kontravarianten Basen durch

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.6)$$

gegeben. Das *Kronecker-Delta*

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

beschreibt die Dualität zwischen den ko- bzw. kontravarianten Basissystemen durch

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j. \quad (2.8)$$

Die Orthogonalität der Basissysteme und die Verwendung von ko- und kontravarianten Koordinatenbasen werden sich später als vorteilhaft erweisen. Mit den bis hierher definierten Ortsvektoren und Basissystemen ist es möglich, Geometrien und Verzerrungsmaße zu beschreiben. Für eine umfangreichere Darstellung der Differentialgeometrie und der Geometrie gekrümmter Flächen sei an dieser Stelle auf [50] verwiesen.

2.2 Deformationen und Verzerrungsmaße

Die Verschiebung eines materiellen Punktes von der Referenz- in die Momentankonfiguration wird, wie in Abb. 2.1 dargestellt, durch den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.9)$$

ausgedrückt. Zur Beschreibung einer Deformation wird der sogenannte *Deformationsgradient* verwendet. Er stellt eine essentielle Größe in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik dar und ist als lineare Abbildung eines infinitesimalen Linienelements in der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ auf ein infinitesimales Linienelement in der Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

zu verstehen. Durch die Darstellung des Ortsvektors als Taylorreihe mit Abbruch nach dem linearen Glied

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad (2.11)$$

folgt für die Überführung des Linienelements von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \text{Grad}(\mathbf{x}) d\mathbf{X} \quad (2.12)$$

Dabei ist die partielle Ableitung als der Deformationsgradient definiert

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{oder} \quad [F_{ij}] =: \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \quad (2.13)$$

Der Deformationsgradient ist ein Zweifeldtensor, da dieser zwischen Konfigurationen vermittelt und ist im Allgemeinen nicht symmetrisch, d.h. $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}^T$. Es gilt weiterhin

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{x}}{\partial \xi^i} \otimes \frac{\partial \xi^i}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.14)$$

Die Beschreibung der Bewegung $\hat{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ ist eindeutig und umkehrbar. Aus diesem Grund existiert die Inverse des Deformationsgradienten \mathbf{F}^{-1} , welche das infinitesi-

male Linienelement $d\mathbf{x}$ zurück in die Referenzkonfiguration abbildet

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad . \quad (2.15)$$

Die *Jacobi-Determinante* des Deformationsgradienten \mathbf{F} ist ein Maß für die Volumenänderung, die sich im Laufe der Deformation einstellt. Ein infinitesimales Volumenelement dV in \mathcal{B}_0 wird dabei auf ein deformiertes Volumenelement dv in \mathcal{B}_t abgebildet, sodass gilt

$$dv = J dV \quad . \quad (2.16)$$

Aus der Forderung nach Invertierbarkeit des Deformationsgradienten und der physikalischen Anforderung positiver Volumina folgt, dass die Determinante des Deformationsgradienten stets größer als Null sein muss. Dies lässt sich durch

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \quad (2.17)$$

ausdrücken. Durch die Kompatibilitätsbedingung wird Selbstdurchdringung ausgeschlossen. Darüber hinaus kann mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} und der *Jacobi-Determinanten* J ein Zusammenhang zwischen einem Vektorelement $d\mathbf{A} = dA\mathbf{N}_0$ eines infinitesimalen Flächenelements in der Referenzkonfiguration und einem Flächenelement in der Momentankonfiguration $d\mathbf{a} = da\mathbf{n}$ mit

$$d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A} \quad (2.18)$$

hergestellt werden.

Neben dem Deformationsgradienten wird der Verschiebungsgradient

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{oder} \quad [H_{ij}] = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] \quad (2.19)$$

eingeführt. Er kann mit Hilfe des Deformationsgradienten und des Einheitstensors $\mathbf{1}$ über die Beziehung

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (2.20)$$

dargestellt werden.

Die Deformation eines Körpers setzt sich stets aus einer Starrkörpertranslation, einer Starrkörperrotation und der eigentlichen Deformation zusammen. Dem folgend

lässt sich der Deformationsgradient aufteilen

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R} \quad (2.21)$$

in den orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und den *rechten* Strecktensor \mathbf{U} bzw. den *linken* Strecktensor \mathbf{v} . Die Tensoren \mathbf{U} und \mathbf{v} sind positiv definit und symmetrisch. Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in Gleichung (2.21) ist eindeutig. Somit kann die Deformation eines Linienelements als eine reine Rotation mit anschließender Streckung oder umgekehrt interpretiert werden.

Da sich der Deformationsgradient auf den Bewegungsvorgang in seiner Gesamtheit bezieht und somit auch lokale Starrkörperbewegungen enthält, ist er als Maß für die Verzerrungen eines Körpers nicht geeignet. Aus diesem Grund werden Verzerrungsmaße eingesetzt.

In Abhängigkeit von der Konfiguration, in welcher die Verzerrung betrachtet wird, können zwei positiv definite und symmetrische Verzerrungstensoren definiert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{v}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei werden \mathbf{C} als *rechter Cauchy-Green-Tensor* und \mathbf{b} als *linker Cauchy-Green-Tensor* bezeichnet.

Das gebräuchlichste Verzerrungsmaß ist der *Green-Lagrangesche* oder kurz *Greensche Verzerrungstensor* \mathbf{E} . Er kann auf die Differenz der Quadrate der infinitesimalen Linienelemente

$$d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) \quad (2.23)$$

zurückgeführt werden und liefert den Ausdruck

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.24)$$

Der *Greensche Verzerrungstensor* ist symmetrisch und verschwindet bei reinen Starrkörperrotationen oder -translationen. Eine alternative Darstellung von \mathbf{E} durch den Verschiebungsgradienten \mathbf{H} liefert den Ausdruck

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.25)$$

Bezüglich seiner kovarianten Komponenten kann \mathbf{E} mittels konvektiver Koordinaten wie folgt dargestellt werden

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad . \quad (2.26)$$

Die Koeffizienten resultieren aus

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \quad . \quad (2.27)$$

Aufgrund der Symmetrie des *Greenschen Verzerrungstensors*, kann dieser durch Anwendung der Voigt'schen Notation als Vektor

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}] \quad . \quad (2.28)$$

dargestellt werden. Im Folgenden werden sowohl die *Greenschen Verzerrungen* in Voigtscher Notation, als auch der *Greenschen Verzerrungstensor* mit \mathbf{E} bezeichnet. Welche der beiden Schreibweisen gemeint ist, erschließt sich aus dem jeweiligen mathematischen Zusammenhang. Für den linearen Fall ($\|\mathbf{H}\| \ll 1$) vereinfacht sich Gleichung (2.25) zu

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\epsilon}^{lin} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) \quad (2.29)$$

mit

$$\epsilon_{ij}^{lin} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (2.30)$$

In vielen Anwendungen treten nur kleine Verzerrungen auf. Somit ist es in vielen Fällen zulässig, den nichtlinearen Anteil zu vernachlässigen. Die im folgenden Kapitel dargestellte Schalentheorie wird jedoch für den allgemeinen Fall der geometrischen Nichtlinearität hergeleitet.

2.3 Spannungen

Bisher wurde lediglich die Kinematik eines deformierbaren Körpers beschrieben, nicht jedoch wodurch solche Deformationen hervorgerufen werden. Um das Verhalten des Körpers infolge äußerer Belastungen zu beschreiben, müssen die daraus resultierenden Spannungen im Inneren des Körpers betrachtet werden. Äußere Lasten werden in Volumenkräfte und Oberflächenkräfte unterschieden. Volumenkräfte wirken auf den gesamten Körper, wie beispielsweise die Schwerkraft. Oberflächenlasten wirken hingegen nur an der Oberfläche.

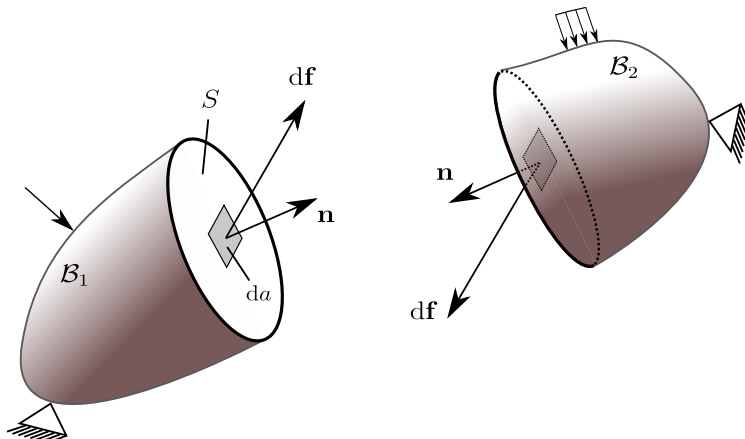


Abbildung 2.2: Schnitt durch einen Körper unter äußerer Belastung

Die im Inneren des Körpers wirkenden Größen können durch einen gedachten Schnitt entlang der Fläche S kenntlich gemacht werden, siehe Abb. 2.2. Der Körper wird dabei in die zwei Hälften \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 unterteilt. Der Spannungsvektor \mathbf{t} , als Folge der äußeren Belastung, ist als endlicher Grenzwert des Quotienten aus dem resultierenden Lastvektor $\Delta \mathbf{f}$ und dem infinitesimalen Flächenelement Δa definiert

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad . \quad (2.31)$$

Die Orientierung des Flächenelements da erfolgt durch den Normalenvektor \mathbf{n} .

Dem *Cauchy-Theorem* folgend existiert eine Beziehung zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und dem Normalenvektor \mathbf{n} , sodass

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad (2.32)$$

gilt. In Gleichung (2.32) wird \mathbf{T} als *Cauchyscher Spannungstensor* bezeichnet. Es findet eine lineare Abbildung des Normalenvektors auf den Spannungsvektor statt. Der *Cauchysche Spannungstensor* ist symmetrisch $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$, was durch die Auswertung der Drehimpulsbilanz gezeigt werden kann. *Cauchysche Spannungen* werden auch als *wahre Spannungen* bezeichnet, da sie im deformierten Zustand, also in der Momentankonfiguration, definiert sind. Darüber hinaus existieren weitere Spannungsmaße. Der *1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* lässt sich mit dem

Cauchy'schen Spannungstensor wie folgt ausdrücken

$$\mathbf{P} = J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \quad . \quad (2.33)$$

Der *Cauchy'sche Spannungstensor* bezieht sich ausschließlich auf Größen der Momentankonfiguration. Der *1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* besitzt eine unsymmetrische Komponentenmatrix. Er wirkt auf ein undeformiertes Flächenelement, während der Kraftvektor in der Momentankonfiguration wirkt. Der *1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* ist arbeitskonform zum Deformationsgradienten.

Der *Kirchhoffscher Spannungstensor*

$$\boldsymbol{\tau} = J\mathbf{T} \quad (2.34)$$

ist in der Momentankonfiguration definiert und findet häufig Anwendung in der numerischen Umsetzung des plastischen Verhaltens von Metallen, die durch Volumenkonstanz während plastischer Deformation gekennzeichnet sind.

Der gebräuchlichste Spannungstensor in der numerischen Mechanik ist, der in der Referenzkonfiguration definierte *2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* \mathbf{S} . Dieser ist symmetrisch und als

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.35)$$

definiert. Die *2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen* können, im Gegensatz zu den *Cauchy'schen Spannungen*, nicht physikalisch interpretiert werden. Sie sind arbeitskonform zu den *Greenschen Verzerrungen* \mathbf{E} , siehe [71]. In konvektiven Koordinaten ausgedrückt lautet der *2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor*

$$\mathbf{S} = S^{ij}\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad . \quad (2.36)$$

Die Koeffizienten

$$S^{ij} = \det\mathbf{F} T^{ij} \quad (2.37)$$

lassen sich über die Komponenten des *Cauchy'schen Spannungstensors* ausdrücken. In Voigtscher Notation lautet der *2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor*

$$\mathbf{S} = [S^{11}, S^{22}, S^{33}, S^{12}, S^{13}, S^{23}] \quad . \quad (2.38)$$

Wie zuvor bei der Definition des *Greenschen Verzerrungstensors*, erschließt sich die Gestalt von \mathbf{S} aus dem jeweiligem mathematischen Zusammenhang. Neben den

hier aufgezeigten Spannungstensoren existiert eine Vielzahl weiterer Definitionen, auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen wird.

2.4 Bilanz- und Erhaltungssätze

In der Mechanik beschreiben Bilanzgleichungen die Eigenschaften des Kontinuums. Da ihre Gültigkeit alle Materialien umfasst, werden sie auch materialunabhängige Gleichungen genannt. Sofern sich die zu bilanzierende Größe während eines betrachteten Prozesses nicht ändert, wird von Erhaltungssätzen gesprochen. Die Gleichungen können sowohl in der Referenz-, als auch in der Momentankonfiguration definiert werden.

Im Allgemeinen wird durch eine Bilanzgleichung die Änderung einer bestimmten Größe Ξ in einem Körper unter Berücksichtigung von Quell- und Senktermen im Inneren des Körpers \mathcal{B} und von Zu- sowie Abflüssen über die Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ des Körpers betrachtet

$$\frac{d}{dt}\Xi = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial\Xi}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \Xi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad . \quad (2.39)$$

Das Volumenintegral in Gleichung (2.39) beschreibt die Quell- oder Senkterme. Der Ausdruck $\Xi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ steht für den Zu- und Abfluss von Ξ senkrecht zu einem infinitesimalen Flächenelement da mit den Normalenvektor \mathbf{v} . Im Folgenden werden die Bilanz- bzw. Erhaltungssätze für die Masse, den Impuls, den Drehimpuls und für die Energie formuliert.

2.4.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz bezeichnet das Gleichbleiben der Masse m eines Körpers, solange es weder zu einem Massenaustausch über die Oberfläche, noch zu einer Zunahme oder Abnahme von Masse im Inneren kommt. Die Aussage wird auch als globale Massenerhaltung bezeichnet. Durch das Volumenintegral über das Dichtefeld des Körpers

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \text{const} \quad (2.40)$$

kann die Masse bestimmt werden. In Gleichung (2.40) bezeichnet $\rho_0(\mathbf{X})$ die Massendichte in der Referenzkonfiguration innerhalb des differentiellen Volumens dV . Die Massendichte $\rho(\mathbf{x}, t)$ und das Volumen dv beziehen sich auf die Momentankonfiguration. Ein Zusammenhang der beiden Massendichten lässt sich mit Gleichung (2.16) herstellen

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad . \quad (2.41)$$

Dadurch kann über die *Jacobi-Determinante* neben einer Volumenänderung auch eine Änderung der Massendichte gemessen werden.

2.4.2 Impulsbilanz

Die Impulsbilanz sagt aus, dass die Summe aller am Körper wirkenden Kräfte gleich der zeitlichen Änderung des Impulses sein muss. Ist diese durch

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV \quad (2.42)$$

beschrieben, wobei \mathbf{v}_0 die Geschwindigkeit in der Referenzbeschreibung ist, lässt sich die Impulsbilanz als

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v}_0 dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 dA \quad (2.43)$$

definieren mit den Volumenlasten \mathbf{b}_0 und dem Spannungsvektor \mathbf{t}_0 . Für den statischen Fall $\dot{\mathbf{I}} = 0$ vereinfacht sich Gleichung (2.43) zu

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 dA = 0 \quad . \quad (2.44)$$

Mit dem *Cauchy-Theorem*, den Gleichungen (2.32) und (2.33) und dem *Gauss'schen Integralsatz*, also der Transformation des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral, folgt die globale Form des Gleichgewichts

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0) dV = 0 \quad . \quad (2.45)$$

Da Gleichung (2.45) für ein beliebiges Volumen gelten muss, muss der Ausdruck in der Klammer zu Null werden. Dadurch folgt die lokale Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = 0, \quad (2.46)$$

die auch als *erster Bewegungssatz von Cauchy* bezeichnet wird.

2.4.3 Drehimpulsbilanz

Die *Drehimpulsbilanz* gibt an, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{m}_0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{v}_0 dV \quad (2.47)$$

gleich dem resultierenden Moment \mathbf{m}_0 aller wirkenden äußeren Volumen- bzw. Oberflächenlasten ist. In integraler Form lautet die Drehimpulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{v}_0 dV = \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{b}_0 dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_0 dA \quad . \quad (2.48)$$

Der Vektor $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ bezeichnet den Ortsvektor bezüglich des Referenzpunktes \mathbf{x}_0 .

2.4.4 Energiebilanz

Die Energiebilanz wird auch als *erster Hauptsatz der Thermodynamik* bezeichnet. Dieser besagt, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie in einem Körper durch die Leistung aller auf den Körper wirkenden äußeren Lasten \mathcal{P}_{ext} und der thermischen Leistung \mathcal{Q} definiert ist

$$\dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{Q} \quad . \quad (2.49)$$

Die Gesamtenergie setzt sich aus der kinetischen Energie \mathcal{K} und der inneren Energie \mathcal{E} zusammen. Dabei ist die kinetische Energie des Körpers wie folgt definiert

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0^2 dV \quad . \quad (2.50)$$

Die Leistung der äußeren Kräfte ist durch den Energieeintrag in der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 durch äußere Lasten

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \, dA \quad (2.51)$$

beschrieben. Werden die Definitionen (2.50) und (2.51) in Gleichung (2.49) eingesetzt, ergibt dies den Ausdruck für die Energiebilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0^2 + e_0 \right) dV = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + r_0) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{n}_0) dA \quad (2.52)$$

mit der inneren mechanischen Energie e_0 , der Wärmequelle r_0 , dem Wärmefluss \mathbf{q}_0 und dem Normalenvektor \mathbf{n}_0 auf der Oberfläche in der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 .

Wird die thermische Leistung \mathcal{Q} vernachlässigt, ist für den statischen Fall die innere Energie gleich der Spannungsleistung \mathcal{P}_{int} . In diesem Fall besagt die Energiebilanz, dass die mechanische Gesamtenergie des Körpers während seiner Bewegung gleichbleibt. Sie kann mittels des *2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* (2.35) und des *Greenschen Verzerrungstensors* (2.24) als

$$\mathcal{P}_{int} = \dot{\mathcal{E}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} e_0 \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, dV. \quad (2.53)$$

ausgedrückt werden. Durch die Spannungsleistung können eine Reihe arbeitskonformer Spannungs-Verzerrungs-Paare gefunden werden. In Gleichung (2.53) ist eines dieser Paare erkennbar, die bereits im Zusammenhang mit der Definition der Spannungstensenoren erwähnt wurden. Arbeitskonforme Größen sind zur Berechnung mechanischer Probleme unerlässlich. Sie müssen so gewählt werden, dass ihr Produkt die Spannungsleistung ergibt. Nicht arbeitskonforme Spannungs-Verzerrungs-Paare können zu falschen Ergebnissen führen.

An dieser Stelle wird das Gesamtpotential Π eingeführt. Es setzt sich aus der Summe des inneren und äußeren Potentials zusammen

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} \quad . \quad (2.54)$$

Die Ausdrücke für die Spannungsleistung (2.53) und die Leistung der äußeren Lasten (2.51) sind im Falle eines konservativen Systems die zeitlichen Ableitungen der

Potentiale

$$\mathcal{P}_{ext} = -\frac{d\Pi_{ext}}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}_{int} = \frac{d\Pi_{int}}{dt} . \quad (2.55)$$

Das Gesamtpotential (2.54) wird für die Herleitung der schwachen Form des Gleichgewichts in Abschnitt 2.6 verwendet.

2.5 Materialgleichungen

Zur Lösung kontinuumsmechanischer Anfangsrandwertprobleme sind die bisherigen Bilanzgleichungen nicht ausreichend. Die Massenbilanz liefert eine Gleichung mit drei unbekannten Geschwindigkeiten und einer unbekannten Dichte. Die Impulsbilanz enthält drei Gleichungen, die die unbekannten Geschwindigkeiten mit den insgesamt neun unbekannten Spannungen verbinden. Durch die Drehimpulsbilanz wird die Symmetrie des Spannungstensors durch drei Gleichungen beschrieben. Es stehen somit sieben Gleichungen für 13 Unbekannte zur Verfügung. Folglich sind sechs weitere Gleichungen zur Lösung des Anfangsrandwertproblems nötig. Diese werden durch die sogenannten *konstitutiven Gleichungen* geliefert, welche das Materialverhalten beschreiben. Im Allgemeinen stellt das Materialgesetz einen Zusammenhang zwischen dem Verzerrungstensor und dem Spannungstensor her. Den einfachsten Fall stellt hierbei linear-elastisches Materialverhalten mit einem proportionalen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen dar. Darüber hinaus gibt es eine Vielzahl weiterer Materialmodelle, die sich hinsichtlich ihrer Anwendung und Komplexität stark unterscheiden und unterschiedlichstes Materialverhalten abbilden können. Im folgenden Abschnitt wird ein Materialmodell für Hyperelastizität aufgezeigt.

2.5.1 Hyperelastisches Materialverhalten

Zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens werden meist *phänomenologische Modelle* verwendet. Dabei wird ein Material makroskopisch als Kontinuum beschrieben. Dies geschieht durch die Suche und das Anpassen mathematischer Gleichungen an Versuchsdaten. Die Abbildung von mechanischen Vorgängen auf Mikroebene ist hierbei weder möglich noch erwünscht.

Elastisches Materialverhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass der Spannungszustand lediglich vom momentanen Deformationszustand der Konfiguration abhängt und die Verformungsgeschichte keinen Einfluss auf die aktuellen Spannungen hat. Der aktuelle Deformationszustand kann jedoch durch unterschiedliche Belastungen erreicht werden. Somit ist die durch die Spannungen geleistete Arbeit, im Gegensatz zum wegunabhängigen Spannungstensor, im Allgemeinen vom Weg abhängig. Das Materialverhalten ist nicht mehr als konservativ anzusehen und es kann ihm kein Potential zugeordnet werden. Solche Materialien werden auch *Cauchy-elastisch* genannt.

Dem gegenüber stehen hyperelastische Materialien. Hier wird in der Materialdefinition die Existenz eines Potentials vorausgesetzt, welches ein Maß für die im Körper gespeicherte Energie infolge der Deformationen ist. Die Ableitung dieses Potentials nach den Verzerrungen liefert die Spannungen. Im Gegensatz zu *Cauchy-elastischen* Materialien sind hyperelastische Materialien konservativ.

Hyperelastisches Materialverhalten ist somit durch eine vollständige Reversibilität der Deformation sowie Weg- und Zeitunabhängigkeit gekennzeichnet. Es setzt die Existenz des sogenannten *Helmholtz-Potentials* Ψ voraus. Wenn dieses Potential ausschließlich vom Deformationsgradienten \mathbf{F} oder einem Verzerrungstensor abhängt, wird das *Helmholtz-Potential* auch als *Verzerrungsenergie-Funktion* oder *Funktion der Formänderungsenergie* bezeichnet. Im Zusammenhang mit hyperelastischen Materialien wird das Potential häufig in Abhängigkeit des *rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungstensors* \mathbf{C} oder des *linken Cauchy-Greenschen Verzerrungstensors* \mathbf{b} definiert. Die *Verzerrungsenergie-Funktion* muss einige Bedingungen erfüllen, die im Folgenden aufgeführt werden.

Zum einen muss die Zuwachsbedingung erfüllt sein. Die physikalische Deutung besagt, dass für eine unendlich große Ausdehnung oder Kompression des Körpers eine unendlich große Menge an Energie notwendig ist

$$\Psi \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad J \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad J \rightarrow \infty \quad . \quad (2.56)$$

Zum anderen dürfen im unverformten Zustand keine Spannungen auftreten, sodass

$$\Psi(\mathbf{F}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{F} = \mathbf{1} \quad (2.57)$$

gilt. Gleichzeitig muss die Verzerrungsenergie während des Deformationsvorgangs

stets positiv sein

$$\Psi(\mathbf{F}) \geq 0 \quad . \quad (2.58)$$

Werden homogene Materialien betrachtet, ist das Potential lediglich vom jeweiligen Deformationszustand abhängig. Für heterogene Materialien besteht zusätzlich die Ortsabhängigkeit

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}) \quad \rightarrow \quad \Psi = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad . \quad (2.59)$$

Gegenstand dieser Arbeit sind Faserverbundwerkstoffe, die einen Aufbau aus mehreren Schichten aus Matrix und Fasern besitzen. Diese weisen meist ein transversal-isotropes Materialverhalten auf. Hier beinhaltet die *Verzerrungsenergie-Funktion* neben dem Deformationsgradienten oder dem Spannungstensor die jeweilige Position im Kontinuum.

Eine weitere Anforderung an das *Helmholtz-Potential* ist die Invarianz gegenüber Starrkörperbewegungen. Dies gilt ebenfalls für die *Verzerrungsenergie-Funktion*. Mit einem orthogonalen Tensor \mathbf{Q} , der eine beliebige Starrkörperbewegung beschreibt, kann die Forderung wie folgt formuliert werden

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{QF}) \quad \text{und} \quad \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{QF}) \quad . \quad (2.60)$$

Um die Gültigkeit von Gleichung (2.60) zu zeigen, wird als orthogonaler Tensor der Rotationstensor \mathbf{R}^T aus Gleichung (2.21) in seiner transponierten Form gewählt. Damit wird aus Gleichung (2.60) mit $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{U}) \quad \text{und} \quad \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (2.61)$$

was für einen beliebigen Deformationsgradienten \mathbf{F} gilt. Des Weiteren kann festgestellt werden, dass das hyperelastische Material nur vom Streckanteil von \mathbf{F} abhängt und unabhängig von Starrkörperrotationen ist.

Da der Strecktensor \mathbf{U} durch den *rechte Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{C} und den *Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{E} ausgedrückt werden kann, ist es möglich, Gleichung (2.61) in

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{E}) \quad \text{und} \quad \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \quad (2.62)$$

zu überführen.

Hyperelastische Materialien haben gemeinsam, dass die durch Deformationen hervorgerufene Systemantwort durch die Ableitung der *Verzerrungsenergie-Funktion* gegeben ist. Unter Verwendung des 1. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* (2.33) lässt sich für homogene bzw. heterogene Materialien schreiben

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad . \quad (2.63)$$

Für den homogenen Fall und mit dem *rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{C} kann der 1. *Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* alternativ durch

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.64)$$

ausgedrückt werden. Das analoge Vorgehen liefert für den 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* (2.35) den Zusammenhang

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.65)$$

und für den *Cauchyschen Spannungstensor*

$$\mathbf{T} = J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad . \quad (2.66)$$

Für isotrope Materialien muss mit dem *rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{C} der Zusammenhang

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T) \quad (2.67)$$

gelten. Es kann weiterhin gezeigt werden, dass das *Helmholtz-Potential* $\Psi(\mathbf{C})$ eine Funktion in Abhängigkeit von den drei Invarianten

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right] \quad \text{und} \quad I_3 = \det \mathbf{C} \quad (2.68)$$

des symmetrischen Tensors \mathbf{C} ist, sodass gilt

$$\Psi = \Psi[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})] \quad . \quad (2.69)$$

Um die konstitutiven Gleichungen für isotropes hyperelastisches Materialverhalten in Abhängigkeit von den Verzerrungsinvarianten zu erhalten, wird die Ableitung

des *Helmholtz-Potentials* $\Psi(\mathbf{C})$ nach \mathbf{C} betrachtet. Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad . \quad (2.70)$$

Nach mathematischen Umformungen [41] resultiert die allgemeine Beziehung zwischen Spannungen und den drei Verzerrungsinvarianten (2.68) für den 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor*

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] \quad . \quad (2.71)$$

2.5.2 Transversale Isotropie

Die vorangegangenen Überlegungen zur Herleitung der Spannungstensoren beziehen sich ausschließlich auf isotrope Materialien. Wie bereits erwähnt, trifft diese Eigenschaft auf faserverstärkte Kunststoffe nicht zu. Somit ist die *Verzerrungsenergie-Funktion*, wie in Gleichung (2.59) gezeigt, eine Funktion der Deformation und des Ortsvektors. Faserverstärkte Kunststoffe bestehen meist aus mehreren übereinander geschichteten Unidirectionalschichten (UD-Schichten). Diese UD-Schichten, bestehend aus in Matrixmaterial gebetteten Fasern, haben charakteristische Eigenschaften. So ist beispielsweise die Steifigkeit in Faserrichtung deutlich höher als senkrecht zu den Fasern. Ein solches Materialverhalten wird als *transversal isotrop* bezeichnet.

Hinsichtlich der Modellierung transversaler Isotropie ist die Ausgangsgleichung wie zuvor im isotropen Fall die *Verzerrungsenergie-Funktion*. Diese wird mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} sowie einem Vektorfeld \mathbf{a}_0 gebildet. Dieses gibt die Faserrichtung im betrachteten Punkt in der Referenzkonfiguration an. Die gleiche Faserausrichtung in der Momentankonfiguration wird mit dem Vektorfeld \mathbf{a} gekennzeichnet. Mit $\bar{\chi}$ wird ein Maß für die Streckung der Fasern entlang \mathbf{a}_0 definiert. Das Quadrat der Streckung folgt zu

$$\bar{\chi}^2 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0 \quad . \quad (2.72)$$

Die Streckung der Faser hängt vom Vektorfeld \mathbf{a}_0 und dem Verzerrungsmaß ab.

Die *Verzerrungsenergie-Funktion* ergibt sich zu

$$\Psi = \Psi (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \quad . \quad (2.73)$$

Wie im Zusammenhang mit Gleichung (2.60) erwähnt, muss die *Verzerrungsenergie-Funktion* (2.73) unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem und objektiv sein. Dies ist gewährleistet, da \mathbf{C} und $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ in der Referenzkonfiguration definiert sind und nicht durch Starrkörperverschiebungen in der Momentankonfiguration beeinflusst werden. Analog zum isotropen Fall nach Gleichung (2.67) kann für transversal isotrope Materialien die Bedingung

$$\Psi (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = \Psi (\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0\mathbf{Q}^T) \quad (2.74)$$

definiert werden. Damit Gleichung (2.74) erfüllt ist, müssen zusätzlich zu den vorhandenen Invarianten (2.68) zwei weitere Invarianten definiert werden. Diese sogenannten *Pseudo-Invarianten* von \mathbf{C} und $\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0$ folgen direkt aus der Anisotropie und lauten

$$I_4 (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}\mathbf{a}_0 = \chi^2, \quad I_5 (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{a}_0 \quad . \quad (2.75)$$

Die *Verzerrungsenergie-Funktion* für transversale Isotropie wird mit den zusätzlichen Invarianten schließlich zu

$$\Psi = \Psi [I_1 (\mathbf{C}), I_2 (\mathbf{C}), I_3 (\mathbf{C}), I_4 (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_5 (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)] \quad . \quad (2.76)$$

Analog zu den Gleichungen (2.70) und (2.71) wird zuerst die Kettenregel angewendet

$$\frac{\partial \Psi (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{n=1}^5 \frac{\partial \Psi (\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)}{\partial I_n} \frac{\partial I_n}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2.77)$$

um anschließend den 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* zu erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right. \\ \left. + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C}\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0) \right] \quad . \quad (2.78) \end{aligned}$$

Die Definition des Spannungstensors unterscheidet sich vom isotropen Fall in Gleichung (2.71) durch die beiden zusätzlichen Terme der Invarianten.

Zur Lösung nichtlinearer Probleme in der numerischen Mechanik werden iterative Methoden wie das *Newton-Raphson-Verfahren* verwendet. Das Ziel hierbei ist es nichtlineare Gleichungen in lineare zu überführen. Um dies zu erreichen, ist es notwendig, die konstitutiven Gleichungen zu linearisieren. Dieses Vorgehen wird in Kapitel 2.6 detailliert aufgezeigt. Die Linearisierung führt zum sogenannten *Elastizitätstensor* \mathbb{C} . Er ist durch die Ableitungen der Spannungen nach den Verzerrungen definiert

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.79)$$

und ist ein Maß für die Änderung der Spannungen nach den Verzerrungen. Der *Elastizitätstensor* ist von vierter Ordnung und besitzt folglich in seiner allgemeinen Form $3^4 = 81$ Komponenten. Aufgrund der Symmetrie der Verzerrungstensoren und des 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* \mathbf{S} ist \mathbb{C} stets symmetrisch. Daher gilt

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk} \quad . \quad (2.80)$$

Der *Elastizitätstensor* besitzt folglich 36 unabhängige Komponenten. Wird zusätzlich die Existenz einer *Verzerrungsenergie-Funktion* Ψ angenommen und \mathbf{S} durch deren Ableitung (2.65) erhalten, kann \mathbb{C} direkt durch die zweite Ableitung der *Verzerrungsenergie-Funktion* gewonnen

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (2.81)$$

und eine weitere Symmetrie

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T \quad \text{oder} \quad \mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \quad (2.82)$$

gezeigt werden. Damit reduziert sich die Gesamtzahl der unabhängigen Komponenten auf insgesamt 21. 1

2.5.3 Linearelastisches transversal-isotropes Materialmodell

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen den *Greenschen Verzerrungen* \mathbf{E} und den 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungen* \mathbf{S} durch ein linearelastisches Materialmodell für transversal-isotropes Materialverhalten hergeleitet. Transversale Isotropie stellt einen Sonderfall der Orthotropie dar. Im Zusammenhang mit der Definition des Elastizitätstensors im vorherigen Abschnitt wurde auf die Anzahl der

Komponenten hingewiesen. Mögliche Richtungssymmetrien der Materialien können diese Zahl weiter verringern.

Orthotropes Materialverhalten liegt vor, wenn das Kraft-Deformationsverhalten für eine Rotation des Materialkoordinatensystems von 180° unverändert bleibt. Zusätzlich liegt keine Kopplung zwischen Normal- und Schubverzerrungen im Bezugssystem parallel zu den Orthotropieachsen vor. Dadurch reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Materialparameter auf neun.

Im Falle transversaler Isotropie gilt zusätzlich, dass eine Vorzugsrichtung existiert und, dass das Kraft-Verformungsverhalten in einer Ebene senkrecht zu dieser Vorzugsrichtung isotrop ist. In allen anderen Ebenen, die nicht senkrecht zur Vorzugsrichtung stehen, gilt die Isotropie nicht. Es liegt ein richtungsabhängiges Materialverhalten vor. Die Zahl der Konstanten verringert sich dadurch auf fünf.

Da aus unidirektionalen Schichten gefertigte faserverstärkte Kunststoffe transversal-isotrope Materialeigenschaften besitzen, soll im Folgenden die Materialmatrix für diese Materialgruppe hergeleitet werden. Dabei werden kleine Verzerrungen angenommen. Die auftretenden Rotationen können hingegen groß sein. Des Weiteren wird lineare Elastizität vorausgesetzt. Daraus ergibt sich, dass die Formänderungsenergie eine quadratische Abhängigkeit bezüglich der Verzerrungen aufweist. Als letzte Annahme gilt, dass die Faserrichtung eine Funktion der Koordinate \mathbf{X} ist.

Diese Annahmen führen zu einem elastischen Materialgesetz mit einer *Verzerrungsenergie-Funktion*, die eine quadratische Funktion der Verzerrungen ist und

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.83)$$

lautet. Dies stellt die einfachste quadratische Funktion der Formänderungsenergie dar. Sie ist konstant bezüglich der Invarianten des *Greenschen Verzerrungstensors* nach Gleichung (2.68) und (2.75)

$$I_1 = \text{tr}\mathbf{E}, \quad I_2 = (\mathbf{E}^2), \quad I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E} \mathbf{a}_0 \quad \text{und} \quad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{a}_0 \quad . \quad (2.84)$$

Die Formänderungsenergie lautet in der Invariantendarstellung

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2}\lambda(\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu_T \text{tr}(\mathbf{E}^2) + \alpha(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E}\mathbf{a}_0) \text{tr}\mathbf{E} \\ & + 2(\mu_L - \mu_T)(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E}^2\mathbf{a}_0) + \frac{1}{2}\beta(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E}\mathbf{a}_0)^2\end{aligned}\quad (2.85)$$

mit den Elastizitätskonstanten $\lambda, \mu_T, \mu_L, \alpha$ und β . Die Spannungen folgen aus der ersten Ableitung der *Verzerrungsenergie-Funktion* nach den *Greenschen Verzerrungen* \mathbf{E}

$$\begin{aligned}\mathbf{S} = & \frac{\partial\Psi(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} \\ = & \lambda\text{tr}\mathbf{E}\mathbf{1} + 2\mu_T\mathbf{E} + \alpha[\text{tr}\mathbf{E}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) + (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E}\mathbf{a}_0)\mathbf{1}] \\ & + 2(\mu_L - \mu_T)(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{E}\mathbf{a}_0 + \mathbf{E}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) + \beta(\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{E}\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \quad .\end{aligned}\quad (2.86)$$

Die zweite Ableitung liefert den konstanten Materialtensor

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_L = & \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{E})}{\partial^2\mathbf{E}} \\ = & \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_T\mathbf{I}^{(1)} + \alpha[\mathbf{1} \otimes (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) + (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \otimes \mathbf{1}] \\ & + 2(\mu_L - \mu_T)(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{I}^{(2)}\mathbf{a}_0) + (\mathbf{I}^{(2)}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \\ & + \beta(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \otimes (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)\end{aligned}\quad (2.87)$$

mit dem Tensor 4. Stufe $\mathbf{I}^{(1)} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ und dem Tensor 3. Stufe $\mathbf{I}^{(2)}\mathbf{a}_0 = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})a_j(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$. Die Spannungen sind durch die erste und der Elastizitätstensor durch die zweite Ableitung der *Verzerrungsenergie-Funktion* gegeben. In Matrizenschreibweise lautet somit der Zusammenhang zwischen dem Vektor der 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungen* \mathbf{S} nach Gleichung (2.38) und den *Greenschen Verzerrungen* \mathbf{E} nach Gleichung (2.28)

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{C}_L \mathbf{E}_L \quad . \quad (2.88)$$

Der Index $(\cdot)_L$ verdeutlicht, dass die Größen in Abhängigkeit der lokalen Schichtkoordinaten definiert sind. Unter der Annahme, dass die Faserrichtung der jeweiligen Schicht mit dem ersten Richtungsvektor des Elementkoordinatensystems überein-

stimmt, also $\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$ gilt, lautet die Matrix der Elastizitätskonstanten

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} \lambda + 2\alpha + 4\mu_L - 2\mu_T + \beta & \lambda + \alpha & \lambda + \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda + 2\mu_T & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda & \lambda + 2\mu_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_T \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

Die Elastizitätsmatrix mit den gängigen elastischen Materialkonstanten $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}$ und G_{12} lautet

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 (1 - \nu_{23}^2) & \bar{c}_2 \nu_{12} (1 + \nu_{23}) & \bar{c}_2 \nu_{12} (1 + \nu_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_2 \nu_{12} (1 + \nu_{23}) & \bar{c}_2 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & \bar{c}_2 (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_2 \nu_{12} (1 + \nu_{23}) & \bar{c}_2 (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) & \bar{c}_2 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Die Indizes der Materialkonstanten beschreiben die Materialrichtungen. Die Konstanten $\bar{c}_1, \bar{c}_2, G_{23}$ und ν_{21} werden durch die Beziehungen

$$\bar{c}_1 = \frac{E_1}{(1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}, \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (2.91)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{E_2}{(1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21})}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (2.92)$$

definiert.

Die Materialkonstanten müssen einige Anforderungen erfüllen, damit die physikalische Aussagekraft des Materialmodells erhalten bleibt. Die Formänderungsenergie ist stets positiv, sobald Verzerrungen auftreten. Sie verschwindet nur für den Fall $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Die Materialmatrix muss somit positiv definit sein, da die Verzerrungen beliebige Werte annehmen können. Daher gelten für die Materialkonstanten die Anforderungen $E_1, E_2, G_{12}, G_{23} > 0$ und bezüglich der Querkontraktion $(1 - \nu_{12}\nu_{21}) > 0, (1 - \nu_{23}^2) > 0$ und $(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}\nu_{21}) > 0$.

Lamine bestehen für gewöhnlich aus einer Vielzahl einzelner Schichten mit unterschiedlicher Faserorientierung. Die Fasern verlaufen dabei im allgemeinen Fall nicht

in Richtung des ersten Vektors des Schalenkoordinatensystems. Die Orientierung der Fasern kann beliebig sein und wird durch ein eigenes Basissystem \mathbf{t}_i' definiert. Eine Transformation des Materialgesetzes der einzelnen Schichten auf das globale schichtunabhängige Koordinatensystem \mathbf{t}_i ist somit notwendig. Die Transformation kann durch eine Transformationsmatrix

$$\mathbf{t}_i' = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{t}_i \quad (2.93)$$

ausgedrückt werden. Die Matrix $\tilde{\mathbf{T}}$ beschreibt die Rotation zwischen den beiden Koordinatenbasen. Da diese Rotation ausschließlich in der Ebene stattfindet, kann als Maß der Winkel φ zwischen den Vektoren \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_1' bzw. zwischen \mathbf{t}_2 und \mathbf{t}_2' verwendet werden. Die Transformationsmatrix ist als

$$\tilde{T}_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j' \quad \text{bzw.} \quad [\tilde{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

definiert. Durch die Transformation der Koordinatenbasen können die *Greenschen Verzerrungen* ebenfalls im jeweiligen Basissystem formuliert werden

$$\mathbf{E} = E_{ij}^L \mathbf{t}_i' \otimes \mathbf{t}_j' = E_{ij}^G \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j \quad (2.95)$$

mit den Komponenten

$$E_{kl}^L = \mathbf{t}_k' \cdot \mathbf{E} \mathbf{t}_l' = \tilde{T}_{ki} E_{ij}^G \tilde{T}_{lj} \quad . \quad (2.96)$$

In Matrizenschreibweise lautet die Transformationsbeziehung

$$\mathbf{E}^L = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{E}^G \quad . \quad (2.97)$$

Die Transformationsmatrix $\hat{\mathbf{T}}$ ist durch

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & -sc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

mit $c := \cos \varphi$ und $s := \sin \varphi$ definiert. Die *Verzerrungsenergie-Funktion* nach Gleichung (2.83) muss invariant bezüglich des verwendeten Koordinatensystems sein. Damit gilt

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^L)^T \mathbf{C}_L \mathbf{E}^L = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^G)^T \mathbf{C}_G^i \mathbf{E}^G \quad . \quad (2.99)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich die Transformation der Materialmatrix bezüglich der Basissysteme als

$$\mathbf{C}_G^i = (\hat{\mathbf{T}}^i)^T \mathbf{C}_L \hat{\mathbf{T}}^i \quad (2.100)$$

ableiten. Die Komponenten der nach globalen Koordinaten transformierten Materialmatrix lauten somit

$$\begin{aligned} C_{11}^G &= c^4 C_{11}^L + 2c^2 s^2 (C_{12}^L + 2C_{44}^L) + s^4 C_{22}^L, \\ C_{12}^G &= c^2 s^2 (C_{11}^L + C_{22}^L - 4C_{44}^L) + (c^4 + s^4) C_{12}^L, \\ C_{13}^G &= c^2 C_{13}^L + s^2 C_{23}^L, \\ C_{14}^G &= c^3 s (C_{11}^L - C_{12}^L - 2C_{44}^L) + c s^3 (C_{12}^L - C_{22}^L + 2C_{44}^L), \\ C_{22}^G &= s^4 C_{11}^L + 2c^2 s^2 (C_{12}^L + 2C_{44}^L) + c^4 C_{22}^L, \\ C_{23}^G &= s^2 C_{13}^L + c^2 C_{23}^L, \\ C_{24}^G &= c s^3 (C_{11}^L - C_{12}^L - 2C_{44}^L) + c^3 s (C_{12}^L - C_{22}^L + 2C_{44}^L), \\ C_{33}^G &= C_{33}^L, \\ C_{34}^G &= c s (C_{31}^L - C_{32}^L), \\ C_{44}^G &= c^2 s^2 (C_{11}^L + C_{22}^L - 2C_{12}^L - 2C_{44}^L) + (c^4 + s^4) C_{44}^L, \\ C_{55}^G &= c^2 C_{55}^L + s^2 C_{66}^L, \\ C_{56}^G &= c s (C_{55}^L - C_{66}^L), \\ C_{66}^G &= s^2 C_{55}^L + c^2 C_{66}^L \quad . \end{aligned} \quad (2.101)$$

Die resultierende Materialmatrix \mathbf{C}_G ist symmetrisch und alle weiteren, in Gleichung (2.101) nicht definierten Einträge, sind Null. Die Spannungen für orthogonale

Materialeigenschaften folgen damit zu

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_G \mathbf{E} \quad (2.102)$$

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{33} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^G & C_{12}^G & C_{13}^G & C_{14}^G & 0 & 0 \\ C_{21}^G & C_{22}^G & C_{23}^G & C_{24}^G & 0 & 0 \\ C_{31}^G & C_{32}^G & C_{33}^G & C_{34}^G & 0 & 0 \\ C_{41}^G & C_{42}^G & C_{43}^G & C_{44}^G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^G & C_{56}^G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65}^G & C_{66}^G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix}.$$

2.5.4 Plastisches Materialverhalten bei kleinen Verzerrungen

In diesem Abschnitt sollen die grundlegenden Gleichungen zur Beschreibung von plastischem Materialverhalten dargelegt werden. Es wird im Folgenden von kleinen Verzerrungen $|\mathbf{E}| < 3\%$ ausgegangen, da dies für die später gezeigten Beispiele hinsichtlich der auftretenden Deformationszustände ausreichend ist. Die Gleichungen basieren auf dem Modell nach *von Mises* [67] und werden für den Fall isotroper Verfestigung definiert. Im Bereich der Modellierung plastischen Materialverhaltens unterschiedlicher Werkstoffe existiert eine große Bandbreite an Modellen. Es sei an dieser Stelle auf [63,92] und [97] verwiesen.

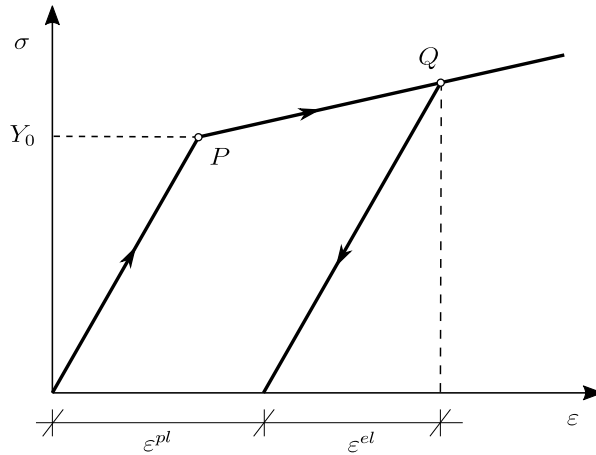


Abbildung 2.3: Spannungs-Dehnungs-Verlauf für einen eindimensionalen Zugversuch mit elasto-plastischem Materialverhalten.

In Abb. 2.3 ist der schematische Verlauf einer Spannungs-Dehnungskurve für einen eindimensionalen Zugversuch abgebildet. Es zeigt sich ein lineares Materialverhalten zu Beginn der Belastung. Bei Erreichen des Punktes P , der *Fließgrenze* Y_0 , treten plastische Deformationen auf und das Material beginnt zu fließen. Eine Verfestigung liegt vor, da die Kurve nach dem Übergang in den plastischen Bereich eine positive Steigung aufweist. Im Punkt Q wird die Zugprobe entlastet. Nach der vollständigen Entlastung verbleibt ein irreversibler Verzerrungsanteil ε^{pl} .

Die in Abb. 2.3 aufgezeigten Größen und Beobachtungen werden nun auf den allgemeinen dreidimensionalen Fall übertragen. Die Grundlage für das Plastizitätsmodell nach *von Mises* für kleine Verzerrungen bildet die additive Aufteilung der Verzerrungen in einen elastischen und einen plastischen Anteil

$$\varepsilon^{lin} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} \quad . \quad (2.103)$$

Die Beziehung zwischen den elastischen Verzerrungen und den zugehörigen Spannungen ist über das Materialgesetz

$$\sigma = \mathbb{C}\varepsilon^{el} \quad (2.104)$$

definiert. Die *Fließbedingung* gibt den elastischen Bereich und dessen Begrenzung durch die *Fließspannung* an. Die *Fließbedingung* hat die Form

$$F(\sigma, \varepsilon_v^{pl}) = \bar{\psi}(\sigma) - Y_0(\varepsilon_v^{pl}) \leq 0 \quad (2.105)$$

und ist eine Funktion der Spannung und der *plastischen Vergleichsdehnung* ε_v^{pl} . Diese ist als

$$\varepsilon_v^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\varepsilon^{pl}| \quad (2.106)$$

definiert. Der Ausdruck $\bar{\psi}(\sigma)$ beschreibt eine Vergleichsspannung und $Y_0(\varepsilon_v^{pl})$ ist die *Fließspannung*. Nach Gleichung (2.105) treten für $F(\sigma, \varepsilon_v^{pl}) < 0$ elastische und für $F(\sigma, \varepsilon_v^{pl}) = 0$ plastische Dehnungen auf. Für Werte größer Null ist die *Fließbedingung* nicht definiert.

Die *Fließregel*

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \bar{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2.107)$$

gibt die Entwicklung der plastischen Deformation an. Der skalare Faktor $\bar{\lambda}$ be-

schreibt die Größe der plastischen Dehnung, während der Gradient $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ die Richtung der äußeren Normalen an die Fließfläche ist.

Die *Fließbedingung* beinhaltet die Funktion $\bar{\psi}(\boldsymbol{\sigma})$, sie wird als *Fließkriterium* bezeichnet. Es existieren verschiedene Ansätze für *Fließkriterien*. Für die Plastizität nach *von Mises* gilt

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}} |\mathbf{s}| \quad (2.108)$$

mit dem Spannungsdeviator \mathbf{s}

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad . \quad (2.109)$$

Die Fließbedingung nach *von Mises* lautet somit

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon_v^{pl}) = \sqrt{\frac{3}{2}} |\mathbf{s}| - Y_0(\varepsilon_v^{pl}) \leq 0 \quad . \quad (2.110)$$

Sie beschreibt im Hauptspannungsraum einen Fließkörper in Form eines Zylinders um die hydrostatische Achse. Punkte im Inneren des Zylinders beschreiben elastische und Punkte auf der Oberfläche plastische Deformationen.

2.6 Schwache Form und deren Linearisierung

Die Bilanz- und Erhaltungssätze in Abschnitt 2.4 bilden die Grundlage zur Beschreibung der Deformation eines Körpers. Um sie jedoch für Diskretisierungsverfahren wie der Finite-Elemente-Methode (FEM) zugänglich zu machen, ist es notwendig, die Gleichungen in ihre *schwache Form* zu überführen. Dies bedeutet, dass die Gleichungen nur noch im integralen Mittel erfüllt werden, anstatt in jedem Punkt des Kontinuums. Diese Variationsprinzipien dienen als Grundlage für die Finite-Elemente-Formulierung.

Nachfolgend wird das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* und dessen Linearisierung gezeigt. Hierbei handelt es sich um ein Einfeldfunktional in Abhängigkeit vom Verschiebungsfeld \mathbf{u} . Anschließend wird das Vorgehen für ein Mehrfeldfunktional beschrieben, bei dem das Variationsprinzip auf zusätzliche Feldgrößen angewendet wird.

Das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* ist äquivalent zur Impulsbilanz und wird auch als schwache Form der Impulsbilanz bezeichnet. Ausgangspunkt zur Herleitung des *Prinzips der virtuellen Verschiebungen* ist das lokale Gleichgewicht nach Gleichung (2.46). Es wird mit einer beliebigen vektorwertigen Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ multipliziert und anschließend über das Volumen des Körpers integriert

$$g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV = 0 \quad . \quad (2.111)$$

Gleichungen, welche aus der schwachen Form entstammen, werden auch *Euler-Lagrange-Gleichungen* oder kurz *Euler-Gleichungen* genannt. Die vektorwertige Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ muss die kinematischen Randbedingungen erfüllen sowie die Bedingung, dass $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ auf dem Rand $\partial \mathcal{B}_{0u}$ gilt. Auf $\partial \mathcal{B}_{0u}$ sind die Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben. Daneben ist der Rand $\partial \mathcal{B}_{0\sigma}$ definiert, auf dem Spannungsrandbedingungen angegeben sind. Zusammen ergeben sie den Rand $\partial \mathcal{B}_0$, wie in Abb. 2.1 dargestellt. Durch partielle Integration und die Anwendung des Divergenztheorems nimmt Gleichung (2.111) nach Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen die folgende Gestalt an

$$g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{P} : \text{Grad} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}) \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dA = 0 \quad . \quad (2.112)$$

Hierbei ist $\bar{\mathbf{t}}_0$ der vorgegebene Spannungsvektor auf dem Rand $\partial \mathcal{B}_{0\sigma}$, mit der Randbedingung $\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0$ und dem Normalenvektor \mathbf{N} . Als Testfunktion kann das virtuelle Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ gewählt werden. Es ist unabhängig von \mathbf{u} und beschreibt eine infinitesimale, virtuelle Änderung des Körpers. Der Ausdruck $\text{Grad} \boldsymbol{\eta}$ kann folglich als die Variation des Deformationsgradienten

$$\delta \mathbf{F} = \delta (\text{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{1}) = \delta (\text{Grad} \mathbf{u}) = \text{Grad} \delta \mathbf{u} \quad (2.113)$$

interpretiert werden. Der in Gleichung (2.112) verwendete 1. *Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* kann durch die Beziehung $\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}$ durch den 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* ersetzt werden. Damit gilt für den ersten Term in Gleichung (2.112) unter Ausnutzung der Symmetrie von \mathbf{S}

$$\mathbf{P} : \text{Grad} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S} \mathbf{F}^T : \text{Grad} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S} : \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T \text{Grad} \boldsymbol{\eta} + \text{Grad}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F} \right) = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}. \quad (2.114)$$

Die Variation des *Greenschen Verzerrungstensors* ist durch $\delta \mathbf{E}$ gegeben. Mit Glei-

chung (2.113)) und lässt sich die schwache Form umschreiben als

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} (\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} - \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u}) \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad . \quad (2.115)$$

Gleichung (2.115) wird auch als *Prinzip der virtuellen Arbeit* bezeichnet. Der erste Term entspricht der *inneren virtuellen Arbeit*

$$\delta W_{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV \quad (2.116)$$

und die verbleibenden beiden Terme entsprechen der *äußeren virtuellen Arbeit*

$$\delta W_{ext} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad . \quad (2.117)$$

Die innere und äußere virtuelle Arbeit sind im statischen Fall von identischer Größe, sodass gilt

$$g(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad . \quad (2.118)$$

In der Festkörpermechanik ist es oftmals zulässig, von konservativen Lasten auszugehen. Dies bedeutet, dass die Wirkungsrichtungen der Lasten während des Deformationsvorgangs als unveränderlich angenommen werden. Diese Definition der Lasten setzt die Existenz des in Gleichung (2.54) definierten Energiefunktional Π voraus. Formulierungen, die auf Funktionalen dieser Art basieren, haben sich als vorteilhaft und robust hinsichtlich der Verwendung numerischer Algorithmen erwiesen. Des Weiteren liefern sie im Zusammenhang mit der Finiten-Elemente-Methode stets symmetrische Steifigkeitsmatrizen.

Die gesamte potentielle Energie eines Systems ist durch die Summe der inneren und äußeren potentiellen Energie

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_{int}(\mathbf{u}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (2.119)$$

mit

$$\Pi_{int}(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \Psi(\mathbf{F}(\mathbf{u})) \, dV \quad \text{und} \quad \Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA \quad (2.120)$$

gegeben. Die Funktion Ψ kennzeichnet die *Verzerrungsenergie-Funktion* aus Ab-

schnitt 2.5.1 in Abhängigkeit vom Deformationsgradienten, bzw. der Deformation. Sind die innere und die äußere potentielle Energie gleich groß, ist ein Gleichgewichtszustand erreicht. Dieser wird auch als *stationäres Potential* bezeichnet. Ziel der Variationsrechnung ist daher die Identifikation des Minimums des Potentials. Um dies zu erreichen, wird die Richtungsableitung nach den Verschiebungen \mathbf{u} berechnet

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = D[\Pi(\mathbf{u})] \cdot \delta\mathbf{u} = \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u})|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (2.121)$$

die in alle Richtungen $\delta\mathbf{u}$ zu Null werden muss. Der Parameter ε ist skalarwertig und der Operator $D[\bullet]$ steht für den *Gateaux-Operator*. Dieser beschreibt eine Richtungsableitung. Gleichung (2.121) wird auch *Prinzip der stationären potentiellen Energie* genannt. Dabei wird gefordert, dass die erste Variation der gesamten potentiellen Energie $\delta\Pi$ zu Null wird. Durch Anwendung der Richtungsableitung auf Gleichung (2.115) kann gezeigt werden, dass das Potential für beliebige Variationen $\delta\mathbf{u}$ stationär wird

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \delta\Pi_{int} + \delta\Pi_{ext} = \delta W_{int} - \delta W_{ext} \quad . \quad (2.122)$$

2.6.1 Linearisierung

Das *Prinzip der virtuellen Arbeit* (2.115) ist nichtlinear abhängig von \mathbf{u} . Wie bereits erwähnt, sind geschlossene Lösungen für Anfangsrandwertprobleme nur für Spezialfälle gegeben. Daher ist eine konsistente Linearisierung der Größen des nichtlinearen Problems notwendig, um iterative Lösungstechniken, wie das *Newton-Raphson-Verfahren* anwenden zu können. Für Gleichung (2.115) liefert die Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem ersten Glied

$$L[g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}), \Delta\mathbf{u}] = g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + D[g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})] \cdot \Delta\mathbf{u} \quad . \quad (2.123)$$

In Gleichung (2.123) repräsentiert das inkrementelle Verschiebungsfeld $\Delta\mathbf{u}$ eine virtuelle, infinitesimale Verschiebung und $L[\bullet]$ ist ein Linearisierungsoperator. Das linearisierte Verschiebungsfeld besitzt dabei die gleiche Gestalt wie die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$. Der zweite Term stellt die Richtungsableitung des *Prinzips der virtuellen Arbeit* dar und wird wie folgt ausgedrückt

$$D[g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})] \cdot \Delta\mathbf{u} = \frac{d}{d\varepsilon} [g(\mathbf{u} + \varepsilon\Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})]|_{\varepsilon=0} \quad . \quad (2.124)$$

Unter Verwendung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors und des Green-schen Verzerrungstensors kann Gleichung (2.124) in

$$D[g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})] \cdot \Delta\mathbf{u} = \int_{\mathcal{B}_0} \left[\mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{E} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}}_{\mathbb{C}} \Delta\mathbf{E} \right] dV \quad (2.125)$$

mit den linearisierten virtuellen Verzerrungen $\Delta\delta\mathbf{E}$ ausgedrückt werden. Der erste Term ist der geometrische, der zweite Term der materielle Anteil. Gleichung (2.123) dient als Ausgangsbasis der Finite-Elemente-Formulierung. Darin ist $g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ das Residuum. In jedem Iterationsschritt wird das aktuelle Inkrement $\Delta\mathbf{u}$ berechnet, damit die Gleichung $L[g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}), \Delta\mathbf{u}] = 0$ erfüllt ist. Anschließend wird das Vektorfeld \mathbf{u} aktualisiert. Dies wird so lange wiederholt, bis $g(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \approx 0$ gilt und somit ein Gleichgewichtszustand und die zugehörigen Verschiebungen \mathbf{u} gefunden wurden.

2.6.2 Mehrfeldfunktionale

In der bisherigen Betrachtung war das Verschiebungsfeld \mathbf{u} die einzige Unbekannte. Darüber hinaus ist es möglich, weitere Feldgrößen als unabhängige Variablen zu definieren. Dies kann hinsichtlich unerwünschter numerischer Phänomene sinnvoll sein. Ein Beispiel hierfür sind Locking-Effekte, bei denen es zu unphysikalischen Versteifungseffekten kommt, welche zu falschen Ergebnissen führen. Besonders bei Schalen- und Plattenelementen niedriger Ordnung unter Biegebeanspruchung treten diese Probleme auf.

Ein Beispiel für solch ein Mehrfeldfunktional ist das *Hellinger-Reissner-Funktional* [40, 84], welches neben den Verschiebungen zusätzlich Spannungen als unbekannte Feldgröße einführt. Finiten-Elemente-Formulierungen, die auf solchen Funktionalen basieren, werden auch als *gemischte Elementformulierungen* bezeichnet.

Eine weitere Anwendung stellt das *Hu-Washizu-Funktional* [42, 106] dar. Hier gibt es insgesamt drei unabhängige Feldgrößen, da zusätzlich zu Verschiebungen und Spannungen auch Verzerrungen enthalten sind. Eine allgemeine Schreibweise des

Hu-Washizu-Funktional lautet

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{P}) = & \int_{\mathcal{B}_0} (\Psi(\mathbf{F}) - \mathbf{P} : \mathbf{F} - \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} - \text{Div} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \, dV \\ & + \int_{\partial \mathcal{B}_{0\sigma}} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t}_0 - \bar{\mathbf{t}}_0) \, dA - \int_{\partial \mathcal{B}_{0u}} \mathbf{t}_0 \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, dA \quad . \end{aligned} \quad (2.126)$$

Das Funktional in Gleichung (2.126) stellt eine Verallgemeinerung des *Prinzips der virtuellen Arbeit* (2.115) dar. Es besitzt keine Nebenbedingungen. Daher sind die enthaltenen Gleichungen *Euler-Lagrange-Gleichungen*, woraus folgt, dass alle drei vorkommenden unabhängigen Größen bei Anwendung der Finiten-Elemente-Methode diskretisiert werden müssen. Die *Euler-Lagrange-Gleichungen* lauten

$$\left. \begin{aligned} \text{Div} \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{P} &= \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \\ \mathbf{F} &= \text{Grad} \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \text{im Gebiet } \mathcal{B}_0 \quad (2.127)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \text{auf} & \partial \mathcal{B}_{0u} , \\ \mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \mathbf{n}_0 &= \bar{\mathbf{t}}_0 & \text{auf} & \partial \mathcal{B}_{0\sigma} \quad . \end{aligned} \quad (2.128)$$

Sie sind gleichbedeutend mit dem statischen Gleichgewicht, der Materialgleichung und der geometrischen Feldgleichung. Eine modifizierte Variante des *Hu-Washizu-Funktional* dient als Grundlage für das in dieser Arbeit entwickelte Schalelement.

2.7 Schädigung

In Kapitel 1 wurde Delamination als bedeutender Schadensmode von Materialien mit laminarem Aufbau und somit auch von faserverstärkten Kunststoffen beschrieben. Um Delaminationen numerisch abbilden zu können, wird in diesem Abschnitt ein isotropes Schädigungsmodell für kleine Verzerrungen vorgestellt. Hierfür soll zunächst auf die mechanischen Grundlagen zur Beschreibung von Versagensphänomenen eingegangen werden.

2.7.1 Grundlagen der Schädigungsmechanik

Ziel der Schädigungsmechanik ist die Beschreibung der Auswirkungen von Materialschädigungen auf die Steifigkeit bzw. das Tragverhalten von Strukturen. Dabei stehen vor allem der Beginn der Schädigung und die Abschätzung der (Rest-)Tragfähigkeit im Mittelpunkt. Daneben ist die Entwicklung der Schädigung, beispielsweise deren Richtung oder räumliche Verteilung, von Interesse. Ziel der Schädigungsmodelle ist es, mikromechanische Prozesse auf einer makroskopischen Ebene abzubilden.

Zur Beschreibung der Schädigung wird die sogenannte *Schädigungsvariable* d genutzt [46]. Diese kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Ein Wert von $d = 0$ bedeutet, dass keine Schädigung existiert. Für $d = 1$ ist das Material vollständig geschädigt. Die *Schädigungsvariable* ist durch das Verhältnis von geschädigter Fläche A_d zu ungeschädigter Fläche A_0

$$d = \frac{A_d}{A_0} \quad \text{mit} \quad d \in [0, 1] \quad (2.129)$$

definiert. Durch die Schädigungsvariable d kann die Entfestigung von Materialien infolge von Schädigung beschrieben werden. Diese Reduktion der Steifigkeit ist schematisch in Abb. 2.4 dargestellt.

Es ist ein linear-elastischer Anfangsbereich, die einsetzende Schädigung für $d > 0$ und die reduzierte Steifigkeit $(1 - d) \mathbb{C}$ bei Wiederbelastung zu erkennen. In diesem Zusammenhang werden die *effektiven Spannungen* definiert [77]. Hierbei wird das mechanische Verhalten eines geschädigten Körpers mit dem eines ungeschädigten verglichen. Unter der Annahme, dass in beiden Körpern identische Verzerrungszu-

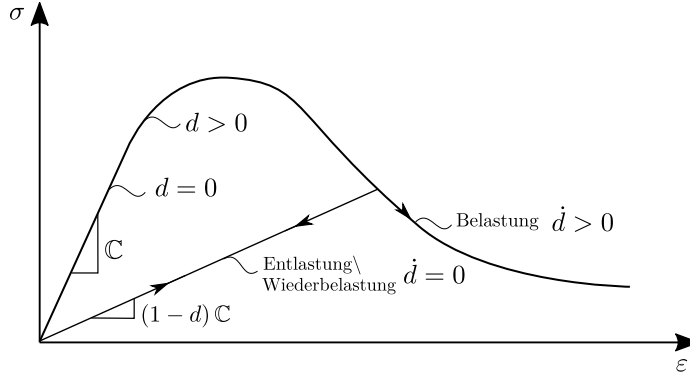


Abbildung 2.4: Spannungs-Dehnungs-Verlauf für Belastung und Entlastung / Wiederbelastung unter Berücksichtigung von Schädigung.

stände herrschen, kann folgender Zusammenhang formuliert werden

$$\bar{\sigma} (A_0 - A_d) = \sigma A_0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma = (1 - d) \bar{\sigma} \quad . \quad (2.130)$$

Dabei wird $\bar{\sigma}$ als *effektiver Spannungstensor* bezeichnet. Zur Beschreibung von Schädigungsmechanismen durch konstitutive Gleichungen wird ein Evolutionsgesetz benötigt, welches die Systemantwort im Falle von Schädigung wiedergibt. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten, diese Antwort zu beschreiben. Wird der eindimensionale Fall betrachtet, kann diese Materialantwort linear, bilinear oder exponentiell sein. In Abb. 2.5 sind jeweils eine lineare und eine exponentielle Materialantwort dargestellt.

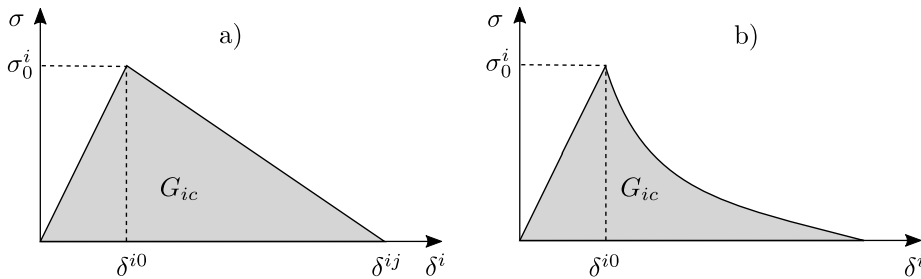


Abbildung 2.5: Spannungs-Verschiebungs-Verlauf a) lineare und b) exponentielle Materialantwort.

Der Parameter δ^i in Abb. 2.5 beschreibt äquivalente Verschiebungen nach [16], wel-

che die charakteristische Elementlänge mit einbeziehen. Die grau markierte Fläche unterhalb der Spannungs-Verschiebungs-Kurven wird als *Bruchzähigkeit* oder auch *kritische Energiefreisetzungsrate* G_{ic} bezeichnet. Sie ist ein Materialparameter und zusätzlich vom jeweiligen Bruchmode i abhängig. Diese sind in Abb. 2.6 dargestellt und gliedern sich in drei Moden.

- Mode I beschreibt eine Rissöffnung, initiiert durch Zugbelastung senkrecht zur Rissfläche.
- Mode II ist ein ebener Schubmode, der durch Schubbelastung parallel zur Rissfläche und senkrecht zur Rissrichtung entsteht.
- Mode III ist ebenfalls ein Schubmode, jedoch aus der Ebene heraus. Die Belastung wirkt in der Rissebene und senkrecht zur Rissrichtung.

Die *Bruchzähigkeit* G_{ic} folgt somit aus

$$\int_0^{\delta^i} \sigma^i d\delta = G_{ic} \quad . \quad (2.131)$$

Aus Gleichung (2.131) wird deutlich, dass die *Bruchzähigkeit* für jeden Mode i einzeln bestimmt werden muss. Sie ist von mehreren Parametern abhängig, beispielsweise von der Temperatur, der Belastungsgeschichte, oder auch dem umgebenden Medium.

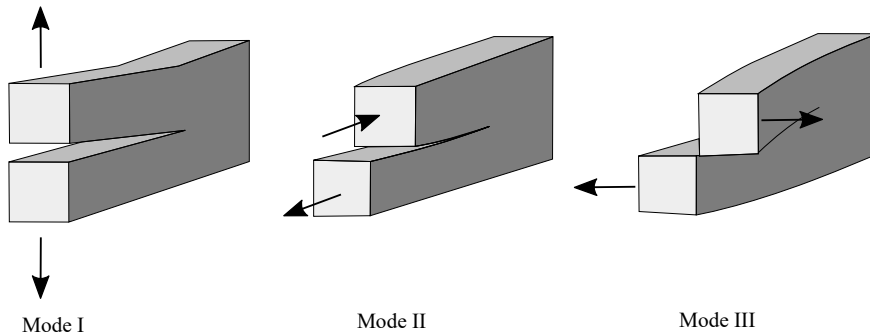


Abbildung 2.6: Darstellung der grundlegenden Versagensmoden

In der Realität tritt meist sogenanntes *Mixed-Mode-Versagen* auf. Es wirken also mehrere Moden gleichzeitig.

2.7.2 Isotropes Schädigungsmodell

In dieser Arbeit wird ein isotropes Schädigungsmodell unter der Annahme kleiner Verzerrungen verwendet. Das Modell basiert auf den Arbeiten von OLIVER ET AL. [74] und wurde in [72] weiterentwickelt. Die grundlegenden Gleichungen werden im Folgenden aufgezeigt.

Isotrope Schädigungsmodelle stellen die einfachste Variante der Schädigungsformulierung dar. Es wird hierbei nicht zwischen Schädigungen durch Zug- oder Druckbelastung unterschieden. Das nichtlineare Materialverhalten und die damit einhergehende Reduktion der Steifigkeit werden durch einen einzelnen Parameter beschrieben.

Der Ausgangspunkt für die Formulierung des Schädigungsmodells bildet das *Helmholtz-Potential* $\Psi(\mathbf{E}, d)$ aus Gleichung (2.59)

$$\Psi(\mathbf{E}, d) = (1 - d) \Psi^e \quad \text{mit} \quad \Psi^e = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbb{C} \mathbf{E}, \quad (2.132)$$

welches nun zusätzlich von der Schädigungsvariablen abhängt. In Gleichung (2.132) ist Ψ^e das elastische, ungeschädigte Potential nach Gleichung (2.83). Die Matrix \mathbb{C} enthält die Komponenten des elastischen Materialtensors und ist definiert als

$$\mathbb{C} = \Lambda \mathbf{1} \mathbf{1}^T + 2\mu \mathbf{I} \quad (2.133)$$

mit $\mathbf{1} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T$ und der nur in der Diagonalen besetzten Matrix $\mathbf{I} = \text{diag}[1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Die Lamé-Konstanten in Gleichung (2.133) folgen zu

$$\Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad . \quad (2.134)$$

Unter der Annahme, dass für die Querkontraktion $\nu = 0$ gilt, vereinfacht sich die Matrix zu

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbf{I} \quad . \quad (2.135)$$

Der Einfluss der Zwischenschichtsteifigkeit μ wird in den numerischen Beispielen eingehend untersucht. Die Annahme $\nu = 0$ stellte sich numerischen Tests zufolge als sinnvoll dar. Die konstitutive Gleichung für das isotrope Schädigungsmodell lautet

$$\mathbf{S} = (1 - d) \mathbb{C} \mathbf{E} \quad . \quad (2.136)$$

Des Weiteren wird ein Schädigungskriterium benötigt. Um dieses zu formulieren, wird zunächst die Norm

$$\tau_S = \sqrt{\mathbf{S}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}} \quad (2.137)$$

definiert. Diese dient zum Vergleich unterschiedlicher Deformationszustände, wie sie in Abb. 2.4 dargestellt sind. Die interne Variable $\bar{\alpha}_0$ folgt aus Gleichung (2.137) zu

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\sigma_c}{\sqrt{2\mu}} \quad . \quad (2.138)$$

Mit diesen Größen wird das Schädigungskriterium mit der Norm als

$$F_S(\mathbf{S}, q) = \tau_S - q(\bar{\alpha}) \geq 0 \quad (2.139)$$

definiert. Das Schädigungskriterium beinhaltet mit $q(\bar{\alpha})$ eine Funktion der internen Variablen $\bar{\alpha} \in [\bar{\alpha}_0, \infty]$ und beschreibt die momentane Schädigungsschwelle. Dabei ist σ_c eine Materialkonstante, die, analog zur Fließspannung bei plastischem Materialverhalten, die kritische Spannung für das Auftreten von Schädigungen angibt. Diese bezieht sich auf einen einaxialen Spannungszustand mit $\mathbf{S} = [\sigma_c, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. Schädigung tritt somit auf, sobald die Norm τ_S den Anfangswert der Schädigungsschwelle $\bar{\alpha}_0$ übersteigt.

Sobald Schädigung auftritt, ist es erforderlich, deren Entwicklung zu beschreiben. Hierzu wird die interne Variable in Beziehung zur Schädigungsvariablen d gesetzt. In [75] wird folgender Zusammenhang vorgeschlagen

$$d = 1 - \frac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}} e^{H_0 \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_0}\right)} \quad . \quad (2.140)$$

Für die Evolution von $\bar{\alpha}$ wird mit dem Parameter $\bar{\lambda} \geq 0$ der Ansatz $\dot{\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}$ gewählt. Das Entfestigungsgesetz ist nach [75] durch den Parameter H_0 als

$$H_0 = \left(\frac{2\mu G_c}{\sigma_c^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad \text{mit} \quad G_c = \frac{g_c}{h_I} \quad (2.141)$$

definiert. Das Schädigungsmodell ist in Tabelle 2.1 inklusive der Be- und Entlastungsbedingungen zusammengefasst.

Tabelle 2.1: Isotropes Schädigungsmodell

1. Helmholtz-Potential

$$\Psi(\mathbf{E}, \bar{\alpha}) = [1 - d(\bar{\alpha})] \Psi^e(\mathbf{E}) \quad \Psi^e = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbb{C} \mathbf{E}$$

2. Spannungen

$$\mathbf{S} = (1 - d) \mathbb{C} \mathbf{E}$$

3. Schädigungsvariable

$$\begin{aligned} q(\bar{\alpha}) &= \bar{\alpha}_0 \exp[H_0 (1 - \bar{\alpha}/\bar{\alpha}_0)] \\ d(\bar{\alpha}) &= 1 - q(\bar{\alpha})/\bar{\alpha} \quad d \in [0, 1] \end{aligned}$$

4. Schädigungskriterium

$$F_S(\mathbf{S}, q) = \tau_S - q(\bar{\alpha}) \quad \tau_S = \sqrt{\mathbf{S}^T \mathbb{C}^{-1} \mathbf{S}}$$

5. Entwicklungsgesetz der internen Variablen

$$\dot{\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}, \quad \bar{\alpha} \in [\bar{\alpha}_0, \infty] \quad \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}(t=0) = \sigma_c / \sqrt{2\mu}$$

6. Be- und Entlastungsbedingungen

$$F_S \leq 0, \quad \bar{\lambda} \geq 0, \quad \bar{\lambda} F_S = 0, \quad \bar{\lambda} \dot{F}_S = 0$$

Kapitel 3

Nichtlineare Schalentheorie

Im folgenden Kapitel wird die nichtlineare Schalentheorie, die dem in dieser Arbeit entwickelten gemischten Schalenelement zugrunde liegt, näher erläutert. Hierzu werden zuerst der Begriff der Schale definiert und Anwendungsbeispiele von Schalen erläutert, bevor ein Überblick über verschiedenen Ansätze zur kinematischen Beschreibung von Schalen gegeben wird.

3.1 Schalen

Als Schalen werden im Allgemeinen oberflächenartige dreidimensionale Strukturen bezeichnet, deren Abmessungen in einer Koordinatenrichtung deutlich kleiner sind, als in den verbleibenden beiden Raumrichtungen. Schalen können beliebige Krümmungen aufweisen. Die Belastungen sind in allen drei Raumrichtungen möglich. Die Geometrie einer Schale kann eindeutig durch ihre Mittelfläche und einem die Dickenrichtung beschreibenden Direktorfeld definiert werden.

Schalenartige Strukturen kommen in vielen verschiedenen Gebieten zum Einsatz. Ihr Vorteil besteht aus einer großen Traglast, bei vergleichsweise geringem Materialbedarf. Traditionell spielen sie im Bauwesen eine große Rolle, in der sie zur Konstruktion großer Kuppelbauwerke genutzt werden. Heutige Anwendungen von Schalen liegen in Luft- und Raumfahrt und im Automobilbau. Häufig werden Schalen durch Aussteifungselemente zusätzlich stabilisiert, um ihr Tragverhalten zu verbessern. Dadurch wird es möglich, das Leichtbaupotential schalenartiger Strukturen optimal auszunutzen.

Das strukturelle Verhalten von Schalen wird hauptsächlich durch zwei unterschiedlichen Deformationsarten charakterisiert. Diese sind Membran- und Biegedeformationen. Für den Konstrukteur ist es das Ziel, einen Belastungszustand anzustreben, der möglichst durch Membrandeformationen geprägt ist. Hierbei wird das Material optimal ausgenutzt. Biegung, beispielsweise durch Lagerreaktionen oder Einzellasten, lässt sich jedoch in den meisten realen Belastungszuständen nicht vermeiden. In diesem Zusammenhang sei die Anfälligkeit von Schalen hinsichtlich Stabilitätsversagen genannt, die ihre Verwendung erschweren kann und genauere Untersuchungen erforderlich macht.

Die mathematische Beschreibung von Schalen ist bereits seit geraumer Zeit Gegenstand von Forschungen. Am Beginn standen Arbeiten von KIRCHHOFF [49] und LOVE [61], die sie sich zunächst auf die Beschreibung von Platten beschränkten. Die zentrale Annahme der *Kirchhoffschen Plattentheorie* ist das Ebenbleiben des Querschnitts. Dabei bleibt bei Deformation die Querschnittsachse stets senkrecht zur Plattenmittelebene, siehe Abb. 3.1a. Eine Erweiterung der *Kirchhoff-Theorie* wurde durch REISSNER [81] entwickelt. Im Gegensatz zu vorhergehenden Modellen wurde zusätzlich die Querschubverzerrung zugelassen.

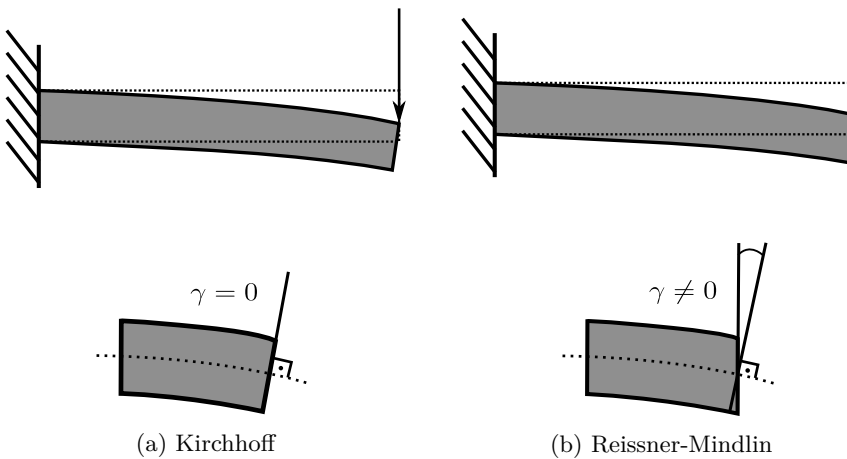


Abbildung 3.1: Vergleich der Schubdeformation

Das erste Plattenmodell, welches Schubverzerrungen im Zusammenhang mit einer reinen Verschiebungsformulierung berücksichtigt, wird MINDLIN [66] zugeschrieben. Die Annahme des ebenbleibenden Querschnitts wird aufgegeben und eine Deformation, wie in Abb. 3.1b zu sehen ist, kann entstehen. Es wird dann anstatt von

einem *schubstarrem* von einem *schubweichem* Deformationsverhalten gesprochen.

Das erste Schalenmodell mit Berücksichtigung von Querschubverzerrungen wurde von NAGDHI [68] entwickelt. Die darin beschriebene sogenannte *Reisser-Mindlin-Kinematik* wird für das Schalenelement in der vorliegenden Arbeit verwendet. Es basiert auf Arbeiten von GRUTTMANN ET. AL [33–35, 53] und [104]. Darüber hinaus existiert eine große Zahl weiterer Schalenmodelle und damit verbundene kinematische Annahmen. Für einen Überblick wird in diesem Zusammenhang auf [12] verwiesen.

3.2 Schalenkinematik

In diesem Abschnitt wird die Schalenkinematik erläutert und die in Kapitel 2 getroffenen kontinuumsmechanischen Annahmen auf die Schale übertragen. Daraus resultieren die Schalenverzerrungen und die Spannungsresultierenden. Zuerst werden die Gleichgewichtsbeziehungen und das *Prinzip der virtuellen Arbeit* hergeleitet, welches die Grundlage für die Finite-Element-Formulierung bildet. Dabei wird auch die Linearisierung des zugrundeliegenden Mehrfeldfunktionals gezeigt.

Die Schale ist durch eine beliebige Referenzfläche Ω_0 in der Schalenebene im dreidimensionalen *euklidischen Raum* definiert. Der Direktor steht in der Referenzkonfiguration senkrecht auf der Referenzfläche. Weiterhin ist die Fläche durch den Rand Γ_0 begrenzt. In der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t werden die Größen mit Ω_t , \mathcal{B}_t und Γ_t bezeichnet.

Im *euklidischen Raum* ist das Basissystem \mathbf{e}_i sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration definiert. Das konvektive Koordinatensystem ξ^i verformt sich unter Deformation ebenfalls.

Ein beliebiger Punkt der undeformierten Schale wird durch den Ortsvektor Θ beschrieben. Dieser lässt sich aus einer Kombination des Ortsvektors \mathbf{X} eines Punktes auf der Referenzfläche der Schale und dem Direktor \mathbf{N} , der orthogonal auf der Referenzfläche steht, beschreiben, siehe Abb. 3.2. Die beiden Vektoren hängen ausschließlich von den Koordinaten der Referenzfläche ξ^1 und ξ^2 ab. Damit gilt mit der Schalendicke h

$$\Theta(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \Theta^i \mathbf{e}_i = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{N}(\xi^1, \xi^2) \quad . \quad (3.1)$$

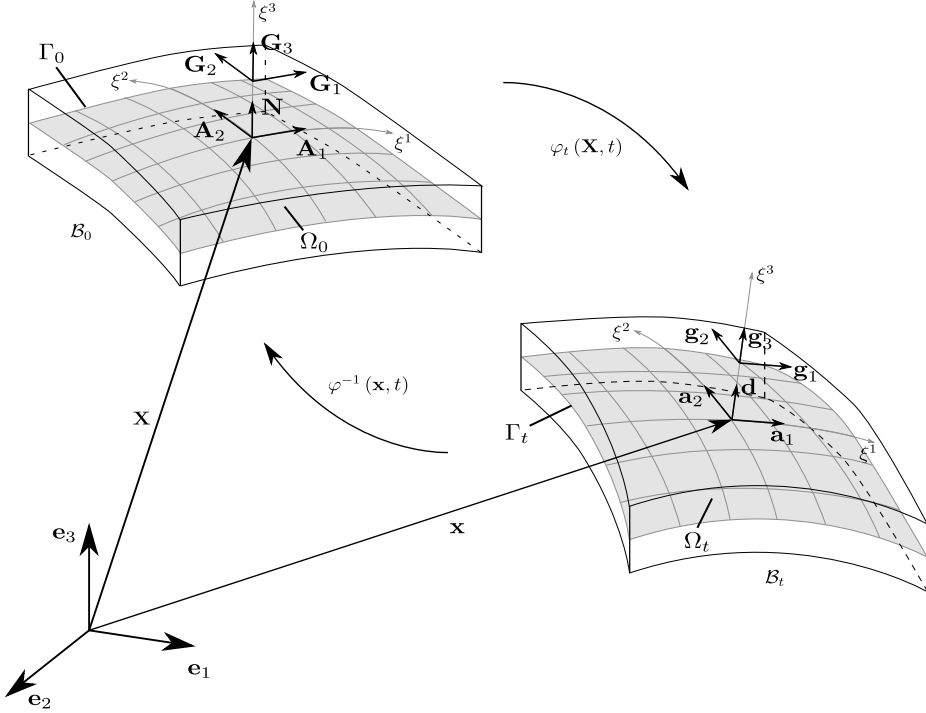


Abbildung 3.2: Schale in Referenz- und Momentankonfiguration

Der Ortsvektor für einen beliebigen Punkt der Schale in der Momentankonfiguration $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ ist mit dem Direktor \mathbf{d} durch

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \bar{\theta}^i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{d}(\xi^1, \xi^2) \quad (3.2)$$

gegeben. Der Verschiebungsvektor \mathbf{u} folgt zu

$$\mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) - \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) \quad . \quad (3.3)$$

Er beschreibt die Verschiebung eines Punktes auf der Schalenreferenzfläche von der Referenz- in die Momentankonfiguration und stellt die drei translatorischen Freiheitsgraden entlang der ξ^1 -, ξ^2 - und ξ^3 -Achse dar.

Durch die Annahmen der *Reissner-Mindlin-Kinematik* kann der Direktor $\mathbf{d}(\xi^1, \xi^2)$ in der Momentankonfiguration auch schiefwinklig auf der Schalenmittelfläche stehen $\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha} \neq 0$. Schubverzerrungen sind somit möglich. Während bei der *Kirchhoff*-

Theorie eine C^1 -Kontinuität der Ansatzfunktionen gefordert wird, genügt es bei der *Reisser-Mindlin-Kinematik* Ansätze mit C^0 -Kontinuität zu verwenden.

In Kapitel 2 wurden die euklidische Basis \mathbf{e}_i und die kovarianten Basen in der Referenzkonfiguration \mathbf{G}_i , bzw. in der Momentankonfiguration \mathbf{g}_i definiert. In ihrer Anwendung auf Schalen entsprechen sie einem kovariantem Basissystem mit einem festen Materialpunkt der Schale als Referenzpunkt. Für die Referenzkonfiguration werden die kovarianten Basisvektoren durch partielle Ableitung des Ortsvektors Θ Gleichung (3.1) gebildet

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1 &= \frac{\partial \Theta}{\partial \xi^1} = \mathbf{X}_{,1} + \xi^3 \mathbf{N}_{,1}, \\ \mathbf{G}_2 &= \frac{\partial \Theta}{\partial \xi^2} = \mathbf{X}_{,2} + \xi^3 \mathbf{N}_{,2}, \\ \mathbf{G}_3 &= \frac{\partial \Theta}{\partial \xi^3} = \mathbf{N} \quad .\end{aligned}\tag{3.4}$$

Analoges Vorgehen liefert für die kovarianten Basisvektoren in der Momentankonfiguration

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi^1} = \mathbf{x}_{,1} + \xi^3 \mathbf{d}_{,1}, \\ \mathbf{g}_2 &= \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi^2} = \mathbf{x}_{,2} + \xi^3 \mathbf{d}_{,2}, \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \xi^3} = \mathbf{d} \quad .\end{aligned}\tag{3.5}$$

Die zugehörigen kontravarianten Basisvektoren können über die Orthogonalitätsbedingungen $\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_{ij}$ und $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_{ij}$ gewonnen werden. Die Basisvektoren auf der Schalenreferenzfläche sind durch

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{G}_1 (\xi^1, \xi^2, \xi^3 = 0) = \mathbf{X}_{,1}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{G}_2 (\xi^1, \xi^2, \xi^3 = 0) = \mathbf{X}_{,2}, \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{g}_1 (\xi^1, \xi^2, \xi^3 = 0) = \mathbf{x}_{,1}, \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{g}_2 (\xi^1, \xi^2, \xi^3 = 0) = \mathbf{x}_{,2}\end{aligned}\tag{3.6}$$

für die Referenz- bzw. Momentankonfiguration gegeben. Der Direktor $\mathbf{N} = \mathbf{A}_3$ steht orthogonal auf den Basisvektoren \mathbf{A}_α der Schalenmittefläche. Des Weiteren

werden das infinitesimale Flächenelement dA

$$dA = j \, d\xi^1 d\xi^2 \quad \text{mit} \quad j = \sqrt{A} = |\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| \quad (3.7)$$

mit in der Referenzfläche ausgewerteten Jacobi-Determinanten j und das differentielle Volumenelement

$$dV = \sqrt{G} \, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad \text{mit} \quad \sqrt{G} = (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3 \quad (3.8)$$

definiert. Ziel der Einführung dieser Gleichungen ist die Überführung der Integration über das Schalenvolumen in eine Integration über die Schalenmittelfläche. Um dies zu erreichen, ist eine Beziehung zwischen den Basisvektoren auf der Referenzfläche und den Basisvektoren im Schalenraum \mathbf{G}_i notwendig. Hierfür wird der sogenannte *Shifter-Tensor*

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^i \quad (3.9)$$

eingeführt. Er ist ein Tensor zweiter Ordnung und in seiner Funktion ähnlich zum Deformationsgradienten. Der Zusammenhang zwischen den Basisvektoren in der Schalenmittelfläche und denen des Schalenraums ist folglich durch

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{Z} \mathbf{A}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{a}_i \quad (3.10)$$

gegeben. Die Umwandlung der Volumenintegrale in Flächenintegrale erfordert die Determinante des *Shifter-Tensors*. Sie ist durch

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{G}{A}} \quad (3.11)$$

definiert und liefert für das Verhältnis der differentiellen Größen

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\sqrt{G} \, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}{\sqrt{A} \, d\xi^1 d\xi^2} = \bar{\mu} \, d\xi^3 \quad . \quad (3.12)$$

In erster Näherung kann für schwach gekrümmte Schalen $\bar{\mu} = 1$ angenommen werden.

Der Direktor in der Momentankonfiguration \mathbf{d} wird mit

$$\mathbf{d} = \mathbf{R} \mathbf{N} \quad (3.13)$$

bestimmt. Gleichung (3.13) ist eine orthogonale Transformation und beschreibt die Rotation des Direktors. Der orthogonale Rotationstensor \mathbf{R} beispielsweise durch Euler-Winkel oder Quaternionen ausgedrückt werden [15]. In dieser Arbeit wird eine Parametrisierung des Rotationstensors durch die *Rodrigues-Formel* [6] gewählt

$$\mathbf{R} = \mathbf{1} + \frac{\sin \omega}{\omega} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega}^2 \quad . \quad (3.14)$$

Der Tensor $\boldsymbol{\Omega}$ ist ein schiefsymmetrischer Tensor, dessen axialer Vektor durch

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

definiert ist. Damit gilt

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \omega_2 k_3 - \omega_3 k_2 \\ \omega_3 k_1 - \omega_1 k_3 \\ \omega_1 k_2 - \omega_2 k_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} \quad . \quad (3.16)$$

Der Vektor \mathbf{k} kann hierbei ein beliebiger Vektor aus \mathbb{R}^3 sein. Die Einträge von $\boldsymbol{\omega}$ beschreiben eine Drehung in Abhängigkeit des globalen Koordinatensystems \mathbf{e}_i . Dieses Vorgehen ist für $\omega < 2\pi$ frei von Singularitäten.

3.3 Schalenverzerrungen

Verzerrungen beschreiben, wie in Abschnitt 2.2 gezeigt, den Deformationsvorgang eines Körpers. In diesem Abschnitt sollen die bisher getroffenen Annahmen bezüglich der Verzerrungsmaße auf die Schalenkinematik übertragen werden. Der Deformationsgradient lässt sich nach Gleichung (2.14) durch die ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren ausdrücken. Daneben kann der Deformationsgradient durch Verwendung des *Shifter-Tensors* definiert werden. Mit dem Deformationsgradienten der Schalenmittelfläche $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(\xi^3 = 0)$ gilt

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{A}^i \quad \text{und} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{a}_i = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{A}_i \quad . \quad (3.18)$$

Damit können die Beziehungen

$$\mathbf{g}_i = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{Z}} (\mathbf{G} \mathbf{A}_i) = \underbrace{(\bar{\mathbf{Z}} \mathbf{G} \mathbf{Z}^{-1})}_{\mathbf{F}} \mathbf{G}_i \quad (3.19)$$

definiert werden.

Der *Greensche Verzerrungstensor* wurde bereits für den allgemeinen dreidimensionalen Fall definiert. Mit den Richtungsableitungen der Ortsvektoren in Referenz- und Momentankonfiguration $\boldsymbol{\Theta}$ und $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ lässt sich der Tensor der Schalenverzerrungen als

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{\boldsymbol{\theta}}_{,i} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}_{,j} - \boldsymbol{\Theta}_{,i} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{,j}) \quad (3.20)$$

schreiben. Der Zusammenhang zwischen dem dreidimensionalen *Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{E} und dem Verzerrungstensor der Schalenreferenzfläche $\hat{\mathbf{E}}$ lautet:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{E}} = E_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{Z}^{-T} \quad (3.21)$$

Für gekrümmte Schalen gilt im Allgemeinen $\mathbf{E} \neq \hat{\mathbf{E}}$. Die Tensoren besitzen jedoch die identischen Komponenten E_{ij} . Der *Greensche Verzerrungstensor* lässt sich mit dem Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{G} \mathbf{Z}^{-1}$ als

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{Z}^{T-1} \left[\mathbf{E}^0 + \xi^3 \mathbf{E}^1 + (\xi^3)^2 \mathbf{E}^2 \right] \mathbf{Z}^{-1} \quad (3.22)$$

definieren. Darin sind \mathbf{E}^0 , \mathbf{E}^1 , \mathbf{E}^2 die Anteile

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= E_{ij}^0 \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta + \frac{1}{2} \gamma_\alpha (\mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^3 \otimes \mathbf{A}^\alpha), \\ \mathbf{E}^1 &= E_{ij}^1 \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = \kappa_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta, \\ \mathbf{E}^2 &= E_{ij}^2 \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = \rho_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta \end{aligned} \quad (3.23)$$

mit den Normalverzerrungen $\varepsilon_{\alpha\beta}$, den Krümmungen $\kappa_{\alpha\beta}$, den Schubverzerrungen

γ_α und den Krümmungen zweiter Ordnung $\rho_{\alpha\beta}$, die wie folgt formuliert sind

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}) , \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{N}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{N}_{,\alpha}) , \\ \gamma_\alpha &= \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{N} , \\ \rho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{N}_{,\alpha} \cdot \mathbf{N}_{,\beta}) .\end{aligned}\tag{3.24}$$

Für dünne Schalen können die Krümmungen zweiter Ordnung vernachlässigt werden. In Voigtscher Notation lauten die geometrischen Schalenverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g(\mathbf{v}) = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}, \gamma_1, \gamma_2] \quad .\tag{3.25}$$

Der Index $(\cdot)_g$ bedeutet, dass Gleichung (3.25) geometrische Verzerrungen sind, die eine Funktion von $\mathbf{v} := [\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}]^T$ sind. Dem gegenüber stehen die physikalischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$, die im späteren Verlauf als unabhängige Größen definiert werden.

3.4 Verwölbungen und Dickenänderungen

In dieser Arbeit wird das Verschiebungsfeld der Schale um zusätzliche Verschiebungen in Dickenrichtung und Verwölbungen in der Schalenebene erweitert, um die Abbildung eines dreidimensionalen Spannungszustands zu ermöglichen. Diese Diskretisierung und die damit verbundenen Erweiterungen der nichtlinearen Schalentheorie werden im Folgenden aufgezeigt. An dieser Stelle wird ein überlagertes Verschiebungsfeld

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}_i \mathbf{t}_i\tag{3.26}$$

definiert. Die Komponenten \tilde{u}_α beschreiben die Verwölbungen in der Schalenebene in ξ^1 - und ξ^2 -Richtung, während \tilde{u}_3 die relative Verschiebung in Dickenrichtung angibt. Diese kinematischen Größen sind in der lokalen Elementbasis \mathbf{t}_i gegeben. Die Basis befindet sich im Elementmittelpunkt, ist orthogonal und wird in Kapitel 4 im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Formulierung definiert. In Dickenormalenrichtung hat das überlagerte Verschiebungsfeld die Form

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi^3) = \boldsymbol{\Phi}(\xi^3) \boldsymbol{\alpha} \quad .\tag{3.27}$$

Darin sind die einzelnen Funktionen durch

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}(1 - \zeta) , & \phi_2 &= 1 - \zeta^2 , \\ \phi_3 &= \frac{8}{3}\zeta(1 - \zeta^2) , & \phi_4 &= \frac{1}{2}(1 + \zeta)\end{aligned}\quad (3.29)$$

definiert. In Gleichung (3.29) beschreibt $-1 \leq \zeta \leq 1$ die normierte Koordinate der Dickenrichtung der jeweiligen Schicht i . Die Matrix $\bar{\mathbf{a}}^i$ hat die Form

$$\bar{\mathbf{a}}^i = [\mathbf{0}_{12 \times 9 \cdot (i-1)} \mid \mathbf{1}_{12} \mid \mathbf{0}_{12 \times 9 \cdot (N-i)}]_{12 \times M} \quad (3.30)$$

und verknüpft die 12 Freiheitsgrade pro Schicht mit den M Komponenten von $\boldsymbol{\alpha}$.

Um Delaminationen abbilden zu können, werden an dieser Stelle die Schädigungsvariable d_n und die Sprungfunktion H eingeführt. Mit diesen beiden Größen ergibt sich

$$\tilde{\xi}^3 = \xi^3 + d_n H \quad H = \begin{cases} 0.5 H^- & \text{für } \xi^3 \leq \hat{\xi}^3 \\ -0.5 H^+ & \text{für } \xi^3 > \hat{\xi}^3 \end{cases} . \quad (3.31)$$

Diese und weitere geometrischen Größen sind in Abb. 3.3 für den Fall $H^- > 0$, $H^+ > 0$ und die Koordinate $\hat{\xi}^3 = H^- - |h^-|$ dargestellt.

Die Delamination findet in einer Zwischenschicht mit der Dicke h_I statt. Diese Schicht kann an einer beliebigen Stelle im Laminat platziert werden. Die Dicke dieser Zwischenschicht wird im Verhältnis zur Gesamthöhe des Laminats ($h_I \leq 10^{-3} \cdot h$) klein gewählt. Daher ist es für die Ergebnisse unerheblich, ob die Koordinate $\hat{\xi}^3$ bis zur Unter- oder Oberseite der Zwischenschicht reicht. Der Einfluss der Zwischenschichtdicke wird in den numerischen Beispielen in Abschnitt 5 näher betrachtet.

Die Schädigungsvariable $0 \leq d_n \leq 1$ in Gleichung (3.31) ist konstant und berechnet sich aus dem vorhergehenden Lastschritt. Das zugrundeliegende isotrope Schädigungsmodell wurde in Abschnitt 2.7 beschrieben.

Das gesamte Verschiebungsfeld lautet somit

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \tilde{\xi}^3 \mathbf{d} - \xi^3 \mathbf{N} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (3.32)$$

Es setzt sich aus den Verschiebungen aus der *Reissner-Mindlin-Kinematik* und dem überlagerten Verschiebungsfeld aus Gleichung (3.27) zusammen.

Die Verzerrungen eines Punktes der Schale in der Schicht i des Laminats ergeben sich aus dem Zusammenhang zwischen den *Greenschen Verzerrungen*, den Schalenverzerrungen und den zusätzlichen unabhängigen kinematischen Größen α zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\alpha} \quad . \quad (3.33)$$

Der erste Term $\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varepsilon}$ folgt mit den physikalischen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$, die wie die geometrischen Verzerrungen in Gleichung (3.25) in einem Vektor angeordnet werden und lautet in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{A}_1 \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{\xi}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{\xi}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{\xi}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{13} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.34)$$

Die Matrix \mathbf{A}_2 enthält die Ableitungen der kubischen Ansatzfunktionen und ist als

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^1 & \mathbf{A}_2^2 & \mathbf{A}_2^3 & \mathbf{A}_2^4 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}^i \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_2^j = \phi_j' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{und} \quad \phi_j' := \frac{d\phi_j}{d\zeta} \frac{2}{h^i} \quad (3.35)$$

definiert. Gleichung (3.34) zeigt die Verzerrungen E_{11}, E_{22} und E_{12} als Funktionen der Koordinate $\tilde{\xi}^3$. Dies stellt für ausreichend dünne Schalen eine gute Näherung dar.

3.5 Spannungen und Schnittgrößen

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie die kinematischen Größen vom Schalenraum auf die Schalenmittelfläche transformiert werden können. Für den *Green-schen Verzerrungstensor* gilt Gleichung (3.21). Dieses Vorgehen liefert für den 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* (2.35) mit dem *Shifter-Tensor* aus Gleichung (3.10)

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{Z}^T \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{S}} = S^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \quad . \quad (3.36)$$

Darin ist $\hat{\mathbf{S}}$ der Spannungstensor mit den Basisvektoren der Schalenreferenzfläche.

Nach [93] werden die Schnittgrößen \mathbf{n}^α und \mathbf{m}^α festgelegt. Diese können sowohl durch den *Cauchyschen* (2.32), als auch durch den 1. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* (2.33) wie folgt ausgedrückt werden

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{Tg}^\alpha \bar{\mu} d\xi^3 = \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{PG}^\alpha \bar{\mu} d\xi^3, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = \mathbf{d} \times \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{Tg}^\alpha \xi^3 \bar{\mu} d\xi^3 = \mathbf{d} \times \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{PG}^\alpha \xi^3 \bar{\mu} d\xi^3 \quad . \quad (3.38)$$

Die Koordinaten h^+ und h^- beziehen sich auf Ober- bzw. Unterseite der Schale. Die Schnittgrößen aus Gleichung (3.37) lassen sich in Komponenten von $\mathbf{x}_{,\alpha}$ und \mathbf{d} zerlegen und lauten damit

$$\mathbf{n}^\alpha = n^{\beta\alpha} \mathbf{x}_{,\beta} + q^\alpha \mathbf{d} + m^{\alpha\beta} \mathbf{d}_{,\beta} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{m}^\alpha = m^{\beta\alpha} \mathbf{x}_{,\beta} \quad . \quad (3.39)$$

Die Schnittgrößen sind die Membrankräfte $n^{\beta\alpha} = n^{\alpha\beta}$, die Biegemomente $m^{\alpha\beta} = m^{\beta\alpha}$ und die Querkräfte q^α . Die Definition der Schnittgrößenvektoren folgt aus der Variation der Verzerrungen

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{A}_1 \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}_2 \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (3.40)$$

durch die Integration der inneren virtuellen Arbeit in Dickenrichtung

$$\int_{h^-}^{h^+} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \bar{\mu} d\xi^3 = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_\epsilon W + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \partial_\alpha W \quad . \quad (3.41)$$

Dies führt zum Zusammenhang zwischen den Spannungsresultierenden und den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen

$$\partial_{\epsilon} W = \int_{h^{-}}^{h^{+}} \mathbf{A}_1^T \mathbf{S} \bar{\mu} \, d\xi^3 \quad . \quad (3.42)$$

Dabei wurde der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor in die Voigtsche Notation nach Gleichung (2.38) überführt. Daneben ergeben sich durch die zusätzlichen Verschiebungsgrößen α die Schnittgrößen höherer Ordnung. Diese sind durch

$$\partial_{\alpha} W = \int_{h^{-}}^{h^{+}} \mathbf{A}_2^T \mathbf{S} \bar{\mu} \, d\xi^3 \quad (3.43)$$

definiert. Die Integration kann sowohl analytisch, als auch numerisch durchgeführt werden. Die Integrale werden für jede Schicht einzeln mittels Gauss-Integration berechnet und anschließend aufsummiert.

Hinsichtlich der inelastischen Berechnungen wird die hier eingeführte Notation beibehalten, obwohl die Spannungen nicht durch die Ableitung der *Verzerrungsenergiefunktion* nach den Gesamtverzerrungen bestimmt werden. Für inelastisches Materialverhalten werden die Spannungen z.B. mit impliziten Integrationsverfahren berechnet.

3.6 Prinzip der virtuellen Arbeit und Gleichgewichtsbedingungen

In diesem Abschnitt werden die Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt und die variationellen Größen näher betrachtet. Die Herleitung der Euler-Gleichungen unter Berücksichtigung der zusätzlichen unabhängigen Verschiebungsgrößen wird ebenso aufgezeigt, wie die daraus resultierende Nebenbedingung.

3.6.1 Variation der Schalenverzerrungen

Für die Bestimmung der Gleichgewichtsbeziehungen werden die Variationen der Schalenverzerrungen benötigt. Diese sind durch die Richtungsableitung von ε_g der Membranverzerrungen, Krümmungen und Schubverzerrungen definiert

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} + \delta\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) \\ \delta\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \delta\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} + \delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} + \delta\mathbf{d}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) \\ \delta\gamma_\alpha &= \delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} + \delta\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}\end{aligned}\quad (3.44)$$

Die Variationen der Verzerrungen werden im Vektor

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g = [\delta\varepsilon_{11}, \delta\varepsilon_{22}, 2\delta\varepsilon_{12}, \delta\kappa_{11}, \delta\kappa_{22}, 2\delta\kappa_{12}, \delta\gamma_1, \delta\gamma_2] \quad (3.45)$$

zusammengefasst. Für die Schubverzerrungen γ werden gesonderte Ansätze gemacht, welche im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Formulierung im nächsten Kapitel erläutert werden.

Die Variation des Direktors $\delta\mathbf{d}$ und des Vektors der Verdrehungen $\boldsymbol{\omega}$ erfordern einige Vorüberlegungen. Mit dem schiefsymmetrischen Tensor $\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ folgt nach [30]

$$\delta\mathbf{d} = \delta\mathbf{R}\mathbf{N} = \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{d} = \delta\mathbf{w} \times \mathbf{d} \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{w} = \bar{\mathbf{H}}\delta\boldsymbol{\omega} \quad . \quad (3.46)$$

Die Matrix $\bar{\mathbf{H}}$ geht aus den Gleichungen (3.13) bis (3.16) hervor und lautet

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{1} + c_1\boldsymbol{\Omega} + c_2\boldsymbol{\Omega}^2 \quad \text{mit} \quad c_1 = \frac{1 - \cos\omega}{\omega^2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{\omega - \sin\omega}{\omega^3} \quad . \quad (3.47)$$

Die Koeffizienten c_1 und c_2 besitzen für $\omega \rightarrow 0$ die Grenzwerte $1/2$ und $1/6$. Für das Skalarprodukt $\mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{d}$ mit dem beliebigen Vektor \mathbf{h} aus \mathbb{R}^3 gilt

$$\mathbf{h} \cdot \delta\mathbf{d} = (\mathbf{d} \times \mathbf{h}) \cdot \delta\mathbf{w} \quad . \quad (3.48)$$

Für Gleichung (3.46) kann alternativ auch

$$\delta\mathbf{d} = \delta\mathbf{w} \times \mathbf{d} = \mathbf{W}^T\delta\mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \text{skew } \mathbf{d} \quad (3.49)$$

formuliert werden. Diese Schreibweise wird bei der Linearisierung der Variation in

Abschnitt 3.6.5 verwendet.

Das Schalenelement in dieser Arbeit besitzt entweder fünf oder sechs Freiheitsgrade. An Punkten mit Schalenverschnitten treten sechs Freiheitsgrade auf, an allen anderen Schalenknoten fünf. Dieses Vorgehen wird in Abschnitt 3.6.5 näher erläutert. Daher wird eine Transformation des Vektors der virtuellen Rotationen in das lokale Koordinatensystem notwendig. Dieser Zusammenhang zwischen der Variation der Rotationsparameter und den Koordinaten wird mittels

$$\delta\omega = \bar{\mathbf{T}}\delta\beta \quad (3.50)$$

hergestellt. Die Transformationsmatrix $\bar{\mathbf{T}}$ unterscheidet sich in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade und ist als

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{cases} \mathbf{1}_3 & \text{für Punkte an Schalenverschnitten} \\ [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]_{(3 \times 2)} & \text{für alle anderen Punkte} \end{cases} \quad (3.51)$$

definiert. Der Vektor der Variationen der Rotationen $\delta\beta$ folgt analog zu

$$\delta\beta = \begin{cases} [\delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3] & \text{für Punkte an Schalenverschnitten} \\ [\delta\beta_1, \delta\beta_2] & \text{für alle anderen Punkte} \end{cases} \quad (3.52)$$

Damit kann die Variation des Direktors mit

$$\delta\mathbf{d} = \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{T}} \delta\beta \quad (3.53)$$

ausgedrückt werden.

3.6.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Dieser Abschnitt umfasst die Übertragung des Prinzips der virtuellen Arbeit nach Gleichung (2.115) auf Schalen. Dies wird zunächst für die kinematischen Größen der Schalenkinematik durchgeführt. Die Beiträge der zusätzlichen Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ (3.27) und der unabhängigen Spannungen und Verzerrungen zur virtuellen Arbeit werden in einem gesonderten Abschnitt erläutert.

Die innere virtuelle Arbeit wird mit der *Verzerrungsenergie-Funktion* für transver-

sal-isotropes Materialverhalten $\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$ nach Gleichung (2.76) hergeleitet. Die innere virtuelle Arbeit ist nach Gleichung (2.120) und (2.121) durch die Integration der Variation der *Verzerrungsenergie-Funktion* über die Schale definiert

$$\delta W_{int} = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \, dV \quad . \quad (3.54)$$

Die Variation von Ψ folgt mit $\delta \mathbf{C} = 2\delta \mathbf{E}$ (2.24) und der Definition des 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* nach Gleichung (2.65) zu

$$\delta \Psi(\mathbf{C}) = 2\delta \mathbf{E} : \frac{\delta \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)}{\partial \mathbf{C}} = \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \quad . \quad (3.55)$$

Somit entspricht sie der inneren virtuellen Arbeit in Gleichung (2.120). Auf die Referenzfläche der Schale projiziert liefert sie

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega_0} \int_{h^-}^{h^+} \text{tr} \left[(\delta \mathbf{E}^0 + \xi^3 \delta \mathbf{E}^1) \hat{\mathbf{S}} \right] \bar{\mu} \, d\xi^3 \, dA \quad (3.56)$$

$$= \int_{\Omega_0} (n^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + q^\alpha \delta \gamma_\alpha) \, dA \quad . \quad (3.57)$$

Nun können die in Gleichung (3.39) eingeführten Definitionen der Schnittgrößen \mathbf{n}^α und \mathbf{m}^α verwendet werden und liefern nach mathematischen Umformungen

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{n}^\alpha \cdot \delta \mathbf{x}_{,\alpha} + q^\alpha \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d} + \mathbf{m}^\alpha \cdot \delta \mathbf{d}_{,\alpha}) \, dA \quad . \quad (3.58)$$

Die partielle Integration von Gleichung (3.58) ergibt

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = & - \int_{\Omega_0} \left[\frac{1}{j} (j \mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{u} + \left(\frac{1}{j} (j \mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{w} \right] dA \\ & + \int_{\Gamma_{0\sigma}} [(j \mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha) \cdot \delta \mathbf{u} + (j \mathbf{m}^\alpha \nu_\alpha) \cdot \delta \mathbf{w}] \, ds \quad . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dabei wird der Rand der Schale Γ_0 , wie in Abschnitt 2.6 gezeigt, aufgeteilt in einen Rand Γ_{0u} und in die Fläche $\Gamma_{0\sigma}$. Auf dem Rand Γ_{0u} wirken die Verschiebungsrandbedingungen und auf der Fläche $\Gamma_{0\sigma}$ die Spannungsrandbedingungen. Die Variationen müssen zulässig sein und die kinematischen Randbedingungen erfüllen. Das

Linieninkrement ds kennzeichnet den Rand der Schale und der Vektor $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1, \nu_2]^T$ beschreibt die Normale auf den Rand der Schalenfläche. Die Randterme auf Γ_{0u} verschwinden aufgrund der kinematischen Randbedingungen.

Die Oberflächenlasten $\bar{\mathbf{p}}$ auf der Schalenreferenzfläche Ω_0 und die Randlasten $\bar{\mathbf{t}}$ auf dem Rand $\Gamma_{0\sigma}$ definieren den Ausdruck für die virtuelle Arbeit der äußeren Lasten

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\Gamma_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \quad . \quad (3.60)$$

Dies impliziert bereits, dass die statischen Randbedingung $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ auf dem Rand $\Gamma_{0\sigma}$ erfüllt sein muss. Das Prinzip der virtuellen Arbeit lässt sich mit $\mathbf{v} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}]^T$ somit als

$$g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (3.61)$$

schreiben. Durch Einsetzen der vorangehenden Terme lautet die ausführliche Darstellung

$$\begin{aligned} g(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = & \int_{\Omega_0} \left[\left(\frac{1}{j} (j\mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{p}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} + \left(\frac{1}{j} (j\mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha \right) \cdot \delta \mathbf{w} \right] dA \\ & + \int_{\Gamma_{0\sigma}} [(j\mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha - \bar{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{u} + (j\mathbf{m}^\alpha \nu_\alpha) \cdot \delta \mathbf{w}] ds = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.62)$$

Der Fundamentallemma der Variationsrechnung liefert die aus der Schalentheorie resultierenden Euler-Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{j} (j\mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{p}} &= 0 \\ \frac{1}{j} (j\mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{im Gebiet } \Omega_0 \quad (3.63)$$

mit den statischen Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} j(\mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha) - \bar{\mathbf{t}} &= 0 \\ j(\mathbf{m}^\alpha \nu_\alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{auf dem Rand } \Gamma_{0\sigma} \quad . \quad (3.64)$$

3.6.3 Gleichgewicht der Spannungen und eine Nebenbedingung

In diesem Abschnitt werden die Gleichgewichtsbeziehungen der Spannungen aufgezeigt. Die interlaminaren Schubspannungen sind in der Variationsformulierung enthalten. Dies ist ein entscheidender Vorteil, da im Gegensatz zu Nachlaufrechnungen, wie beispielsweise in [90], inelastische Materialgesetze verwendet werden können.

Ausgangspunkt ist die Transformation des 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* \mathbf{S} (2.35) in den 1. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* \mathbf{P} (2.33) durch $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} = P^{ij}\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$. Dabei ist $\mathbf{F} = F_{ij}\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j$ der materielle Deformationsgradient, welcher durch die Komponenten der lokalen, im Element konstanten kartesischen Basis \mathbf{t}_i ist. Unter Annahme kleiner Verzerrungen gilt für den Zusammenhang zwischen \mathbf{S} und \mathbf{P}

$$\begin{aligned} P^{31} &= S^{31} + F_{31} S^{11} + F_{32} S^{21} & F_{3\alpha} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_\alpha \\ P^{32} &= S^{32} + F_{31} S^{12} + F_{32} S^{22} \\ P^{ij} &= S^{ij} & \text{für andere } i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

An den Oberflächen der Schale müssen infolge der Gleichlast $\bar{\mathbf{p}} = p^- \mathbf{N} + p^+ \mathbf{N}$ die folgenden Spannungsrandbedingungen erfüllt sein

$$\begin{aligned} P^{\alpha 3}(h^-) &= S^{\alpha 3}(h^-) = 0 \\ P^{\alpha 3}(h^+) &= S^{\alpha 3}(h^+) = 0 \\ P^{33}(h^+) &= S^{33}(h^+) = p^+ \\ P^{33}(h^-) &= S^{33}(h^-) = -p^- \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Belastung und die zugehörigen geometrischen Größen sind in Abb. 3.4 dargestellt.

Da das lokale Elementkoordinatensystem wie beschrieben orthogonal und konstant ist, können partielle anstelle kovarianter Ableitungen verwendet werden. Die Gleichgewichtsbedingung $\text{Div} \mathbf{P} = P_{,l}^{kl} \mathbf{t}_k = \mathbf{0}$ lautet unter Vernachlässigung von Volumenkraften

$$\begin{bmatrix} P_{,1}^{11} + P_{,2}^{12} + P_{,3}^{13} \\ P_{,1}^{21} + P_{,2}^{22} + P_{,3}^{23} \\ P_{,1}^{31} + P_{,2}^{32} + P_{,3}^{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_0 \quad (3.67)$$

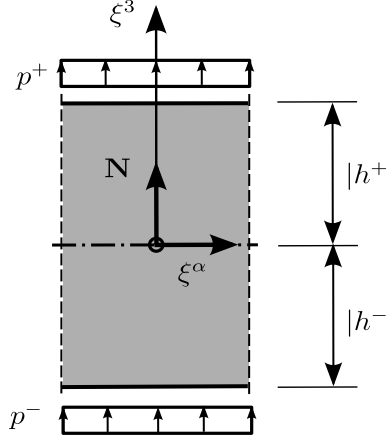


Abbildung 3.4: Belastung der Schale durch Oberflächenlasten an Ober- und Unterseite

Mit Gleichung (3.65) wird der Term $P_{,1}^{31} + P_{,2}^{32}$ umformuliert in

$$\begin{aligned}
 P_{,1}^{31} + P_{,2}^{32} &= S_{,1}^{31} + F_{31,1} S^{11} + F_{32,1} S^{21} \\
 &+ S_{,2}^{32} + F_{31,2} S^{12} + F_{32,2} S^{22} \\
 &+ F_{31} S_{,1}^{11} + F_{32} S_{,1}^{21} + F_{31} S_{,2}^{12} + F_{32} S_{,2}^{22} .
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

An dieser Stelle wird die Größe \bar{w} als

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &:= S^{11} \bar{\kappa}_{11} + S^{22} \bar{\kappa}_{22} + S^{12} \bar{\kappa}_{12} \quad \text{mit} \\
 \bar{\kappa}_{11} &:= \mathbf{d}_{,1} \cdot \mathbf{t}_1, \quad \bar{\kappa}_{22} := \mathbf{d}_{,2} \cdot \mathbf{t}_2 \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}_{12} := \mathbf{d}_{,1} \cdot \mathbf{t}_2 + \mathbf{d}_{,2} \cdot \mathbf{t}_1
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

definiert. Da für kleine Verzerrungen $F_{3\alpha} \ll 1$ gilt, folgt durch Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$$P_{,1}^{31} + P_{,2}^{32} = S_{,1}^{31} + S_{,2}^{32} + \bar{w} \tag{3.70}$$

und für das Gleichgewicht nach Gleichung (3.67) mit Gleichung (3.65)

$$\begin{bmatrix} S_{,1}^{11} + S_{,2}^{12} + S_{,3}^{13} \\ S_{,1}^{21} + S_{,2}^{22} + S_{,3}^{23} \\ S_{,1}^{31} + S_{,2}^{32} + S_{,3}^{33} + \bar{w} \end{bmatrix} := \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}_0 . \tag{3.71}$$

In das Gleichgewicht fließen Spannungen in der Schalenebene $S^{\alpha\beta}$, Querschubspannungen $S^{3\alpha}$ und Spannungen in Dickenrichtung S^{33} ein.

Mit dem Modell für transversal-isotropes Materialverhalten nach Gleichung (2.102) und (3.34) resultieren die Spannungen in der Schalenebene

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{24} \\ C_{41} & C_{42} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} + \tilde{\xi}^3 \kappa_{11} \\ \varepsilon_{22} + \tilde{\xi}^3 \kappa_{22} \\ 2\varepsilon_{12} + \tilde{\xi}^3 2\kappa_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{13} \\ C^{23} \\ C^{43} \end{bmatrix} E_{33} . \quad (3.72)$$

Der Term $S_{,1}^{31} + S_{,2}^{32}$ in Gleichung (3.70) wird durch die beiden ersten Terme von \mathbf{f}

$$S^{13} = S^{31} = - \int_{h^-}^{\xi^3} (S_{,1}^{11} + S_{,2}^{12}) d\bar{\xi}^3 \quad \text{und} \quad S^{23} = S^{32} = - \int_{h^-}^{\xi^3} (S_{,1}^{21} + S_{,2}^{22}) d\bar{\xi}^3 \quad (3.73)$$

ausgedrückt und lautet somit

$$S_{,1}^{31} + S_{,2}^{32} = - \int_{h^-}^{\xi^3} (S_{,11}^{11} + 2 S_{,12}^{12} + S_{,22}^{22}) d\bar{\xi}^3 . \quad (3.74)$$

Weiterhin werden die Matrizen

$$C_{23}^1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{41} & C_{42} & C_{44} \\ C_{41} & C_{42} & C_{44} & C_{21} & C_{22} & C_{24} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

und

$$\mathbf{C}_{23}^2 = - \int_{h^-}^{\xi^3} [C_{11}, C_{12}, C_{14}, C_{21}, C_{22}, C_{24}, 2C_{41}, 2C_{42}, 2C_{44}] \tilde{\xi}^3 d\bar{\xi}^3 \quad (3.76)$$

sowie die ersten und zweiten Ableitungen der Verzerrungen und Krümmungen in

den Vektoren

$$\boldsymbol{\lambda}_{\varepsilon 1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11,1} \\ \varepsilon_{22,1} \\ 2\varepsilon_{12,1} \\ \varepsilon_{11,2} \\ \varepsilon_{22,2} \\ 2\varepsilon_{12,2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_{\kappa 1} = \begin{bmatrix} \kappa_{11,1} \\ \kappa_{22,1} \\ 2\kappa_{12,1} \\ \kappa_{11,2} \\ \kappa_{22,2} \\ 2\kappa_{12,2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\lambda}_{\kappa 2} = \begin{bmatrix} \kappa_{11,11} \\ \kappa_{22,11} \\ 2\kappa_{12,11} \\ \kappa_{11,22} \\ \kappa_{22,22} \\ 2\kappa_{12,22} \\ \kappa_{11,12} \\ \kappa_{22,12} \\ 2\kappa_{12,12} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

definiert. Für konstante Komponenten des Elastizitätstensors C_{ij} kann die Integration in Gleichung (3.76) analytisch durchgeführt werden.

Durch die vorhergehenden Umformungen und Definitionen folgt für die Ableitung der Spannungen nach den Koordinaten der Schalebene in Gleichung (3.70)

$$\begin{bmatrix} S_{,1}^{11} + S_{,2}^{12} \\ S_{,1}^{21} + S_{,2}^{22} \\ S_{,1}^{31} + S_{,2}^{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{23}^1 & \tilde{\xi}^3 \mathbf{C}_{23}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{23}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{\varepsilon 1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\kappa 1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\kappa 2} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$= \mathbf{C}_{23} \boldsymbol{\lambda} \quad .$$

Numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass die zweiten Ableitungen der Verzerrungen für symmetrische Laminates keinen Einfluss auf die Ableitungen der Spannungen $S_{,\alpha}^{3\alpha}$ haben. Die Berücksichtigung der Verzerrungsableitungen zeigte keine Verbesserung der Ergebnisse der interlaminaren Spannungen. Sie werden deshalb in Gleichung (3.78) nicht weiter berücksichtigt.

Die Schnittgrößen höherer Ordnung (3.43) werden durch partielle Integration umformuliert in

$$\partial_{\alpha} W = - \int_{h^{-}}^{h^{+}} \boldsymbol{\Phi}^T \begin{bmatrix} S_{,3}^{13} \\ S_{,3}^{23} \\ S_{,3}^{33} \end{bmatrix} \bar{\mu} d\xi^3 + \mathbf{q} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{23} := - \int_{h^{-}}^{h^{+}} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_{23} \bar{\mu} d\xi^3 \quad . \quad (3.79)$$

Hierbei wird, wie bereits in Abschnitt 3.2 beschrieben, für die Determinante des *Shifter-Tensors* die Näherung $\bar{\mu} = 1$ verwendet. Für die Spannungsrandbedingun-

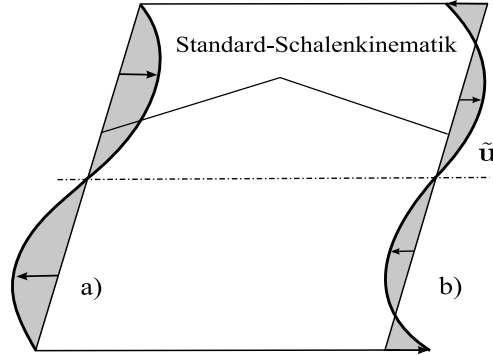


Abbildung 3.5: Falscher und qualitativ korrekter Verlauf der Verwölbung

gen gilt

$$\mathbf{q} = [\mathbf{p}^-, \mathbf{0}_{M-6}, \mathbf{p}^+]^T, \quad (3.80)$$

wobei $\mathbf{p}^- = p^- \mathbf{N}$ und $\mathbf{p}^+ = p^+ \mathbf{N}$ gilt und $\mathbf{0}_n$ der Nullvektor mit n Einträgen ist.

Die in Gleichung (3.69) berechnete Größe \bar{w} ist konstant. Sie wird als Näherung aus dem vorhergehenden Lastschritt verwendet. Daher kann der aus Gleichung (3.71) resultierende Term zusammenfassend durch

$$\bar{\mathbf{q}} := \mathbf{q} + \int_{h^-}^{h^+} \Phi^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{w} \end{bmatrix} \bar{\mu} d\xi^3 \quad (3.81)$$

dargestellt werden. Die integrale Form des Spannungsgleichgewichts $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ aus Gleichung (3.71) folgt durch die Variation der zusätzlichen Verschiebungen $\delta \tilde{\mathbf{u}} = \Phi \delta \boldsymbol{\alpha}$ und den vorab definierten Größen (3.72)-(3.81) zu

$$\int_{h^-}^{h^+} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_{\bar{\mu}} d\xi^3 = -\delta \boldsymbol{\alpha}^T (\partial_{\boldsymbol{\alpha}} W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}}) = 0 \quad . \quad (3.82)$$

Dabei gilt, dass die Variation des Vektors der Verwölbungen und relativen Verschiebungen in Dickenrichtung $\delta \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ ist. Dies führt zu dem Gleichgewicht der Schnittgrößen höherer Ordnung, welches aus dem Term in Klammern folgt

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}} W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.83)$$

Das Verschiebungsfeld $\tilde{\mathbf{u}}$ muss eine Orthogonalitätsbedingung erfüllen, die durch eine Nebenbedingung in das Funktional eingebracht wird. Der Ausgangspunkt dieser Nebenbedingung ist das Gleichgewicht der virtuellen Spannungen

$$\begin{bmatrix} \delta S_{,1}^{11} + \delta S_{,2}^{12} \\ \delta S_{,1}^{21} + \delta S_{,2}^{22} \\ \delta S_{,1}^{31} + \delta S_{,2}^{32} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{23} \delta \boldsymbol{\lambda} = \delta \mathbf{f}_1 = \mathbf{0} \quad . \quad (3.84)$$

Die integrale Form des Gleichgewichts der virtuellen Spannungen nach Gleichung (3.84) liefert mit dem Verschiebungsfeld $\tilde{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\alpha}$

$$\int_{h^-}^{h^+} \delta \mathbf{f}_1^T \tilde{\mathbf{u}} \bar{\mu} d\xi^3 = \delta \boldsymbol{\lambda}^T \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{C}_{23}^T \boldsymbol{\Phi} \bar{\mu} d\xi^3 \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad . \quad (3.85)$$

Mit der Matrix

$$\mathbf{D}_{32} = - \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{C}_{23}^T \boldsymbol{\Phi} \bar{\mu} d\xi^3 = \mathbf{D}_{23}^T \quad (3.86)$$

wird Gleichung (3.85) zu

$$-\delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}_{32} \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad . \quad (3.87)$$

Mit der Bedingung, dass die Variation der ersten und zweiten Ableitungen der Verzerrungen und Krümmungen $\delta \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ sind, folgt die Nebenbedingung in der Form

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{D}_{32} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad . \quad (3.88)$$

Diese erzwingt den korrekten Verlauf der Verschiebungen $\tilde{\mathbf{u}}$ über die Dicke. Anschaulich besagt die Nebenbedingung, dass die Verwölbungen und relativen Verschiebungen nicht zu zusätzlichen Schnittgrößen führen dürfen. Schematisch ist dies in Abb. 3.5 dargestellt. Während der Verlauf *a*) der Verwölbungen zu zusätzlichen Momenten führt, wird durch die Nebenbedingung der Verlauf *b*) erzwungen, der keine zusätzlichen Schnittgrößen hervorruft.

Für nichtlineares Materialverhalten gilt das Materialgesetz nach Gleichung (2.102) nur in seiner linearisierten Form

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{C}_T \Delta \mathbf{E} \quad . \quad (3.89)$$

Hier ist \mathbf{C}_T die Tangentenmatrix, welche aus der konsistenten Linearisierung folgt.

Aus diesem Grund gilt Gleichung (3.72) nur in inkrementeller Form. Abweichend von der Darstellung von \mathbf{C} in Gleichung (2.102), ist die Tangentenmatrix \mathbf{C}_T in der Regel voll besetzt. Grund hierfür sind die Kopplungsterme C_{ij} mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 5, 6$, die im Allgemeinen nicht Null sind. Für die Berechnung von \mathbf{C}_{23} nach Gleichung (3.78) werden diese Kopplungsterme vernachlässigt. Darüber hinaus ist die Matrix \mathbf{C}_{23} eine Funktion der Verschiebungen. Als Annahme wird der konstante Wert aus dem jeweils vorherigem Lastinkrement verwendet. Dies ermöglicht eine quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens.

3.6.4 Schwache Form der gemischten Formulierung

Nachdem in Abschnitt 3.6.2 das Prinzip der virtuellen Arbeit und die zugehörigen Euler-Gleichungen für die Schalenkinematik hergeleitet wurden, wird das Prinzip nun um die zusätzlichen unabhängigen Größen ergänzt. Hierfür wird zunächst die virtuelle Arbeit pro Flächeneinheit der äußeren Lasten $\mathbf{p}^+ = p^+ \mathbf{N}$ und $\mathbf{p}^- = p^- \mathbf{N}$ zu

$$\delta w_{ext} = \mathbf{p}^+ \cdot \delta \hat{\mathbf{u}}(h^+) + \mathbf{p}^- \cdot \delta \hat{\mathbf{u}}(h^-) \quad (3.90)$$

bestimmt. Die Variationen des Gesamtverschiebungsfeldes $\hat{\mathbf{u}}$ aus Gleichung (3.32) folgen zu

$$\delta \hat{\mathbf{u}}(h^+) = \delta \mathbf{u} + \tilde{\xi}^3(h^+) \delta \mathbf{d} + \delta \tilde{\mathbf{u}}(h^+) , \quad (3.91)$$

$$\delta \hat{\mathbf{u}}(h^-) = \delta \mathbf{u} + \tilde{\xi}^3(h^-) \delta \mathbf{d} + \delta \tilde{\mathbf{u}}(h^-) . \quad (3.92)$$

Damit ist die äußere virtuelle Arbeit als

$$\begin{aligned} \delta w_{ext} &= (\mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-) \cdot \delta \mathbf{u} + [\tilde{\xi}^3(h^+) \mathbf{p}^+ + \tilde{\xi}^3(h^-) \mathbf{p}^-] \cdot \delta \mathbf{d} \\ &+ \mathbf{p}^+ \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}(h^+) + \mathbf{p}^- \cdot \delta \tilde{\mathbf{u}}(h^-) \\ &= \bar{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \mathbf{d} + \mathbf{q} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (3.93)$$

mit den Größen $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^-$ und $\bar{\mathbf{m}} = \tilde{\xi}^3(h^+) \mathbf{p}^+ + \tilde{\xi}^3(h^-) \mathbf{p}^-$ definiert. Es wird ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit der folgenden Gleichungen die Darstellung auf $\bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \mathbf{d} = 0$ beschränkt. An dieser Stelle werden die unabhängigen Schnittgrößen eingeführt, die in dem Vektor wie folgt zusammengefasst

$$\boldsymbol{\sigma} = [n^{11}, n^{22}, n^{12}, m^{11}, m^{22}, m^{12}, q^1, q^2]^T \quad (3.94)$$

sind. Die Euler-Gleichungen für das Randwertproblem lauten

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{j} (j \mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{p}} &= \mathbf{0} & \varepsilon_g - \varepsilon &= \mathbf{0} \\ \frac{1}{j} (j \mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha &= \mathbf{0} & \partial_\varepsilon W - \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \\ \partial_\alpha W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{0} & \mathbf{g} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Omega_0 \quad (3.95)$$

mit den Randbedingungen

$$j (\mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha) - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad j (\mathbf{m}^\alpha \nu_\alpha) = \mathbf{0} \quad \text{auf dem Rand } \Gamma_{0\sigma} \quad . \quad (3.96)$$

Der Vergleich mit Gleichung (3.63) zeigt, dass die Euler-Gleichungen zusätzlich das Gleichgewicht der Schnittgrößen höherer Ordnung (3.83), die geometrische Gleichung, das Stoffgesetz und die Nebenbedingung (3.88) enthalten. Die zulässigen Variationen der unabhängigen Größen sind in dem Vektor $\delta \boldsymbol{\theta} := [\delta \mathbf{v}, \delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \varepsilon, \delta \boldsymbol{\alpha}, \delta \boldsymbol{\lambda}]^T$ mit $\delta \mathbf{v} := [\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\omega}]$ zusammengefasst. Durch Anwendung der Variationsrechnung folgt für die schwache Form

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}, \delta \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega_0} \left[- \left(\frac{1}{j} (j \mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{p}} \right) \cdot \delta \mathbf{u} - \left(\frac{1}{j} (j \mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha \right) \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \right. \\ &\quad \left. + \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon_g - \varepsilon) + \delta \varepsilon^T (\partial_\varepsilon W - \boldsymbol{\sigma}) + \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\partial_\alpha W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}}) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g} \right] dA \\ &\quad + \int_{\Gamma_{0\sigma}} ([j (\mathbf{n}^\alpha \nu_\alpha) - \bar{\mathbf{t}}] \cdot \delta \mathbf{u} + [j (\mathbf{m}^\alpha \nu_\alpha)] \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) ds = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.97)$$

Nach partieller Integration lautet die schwache Form

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}, \delta \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\Omega_0} [\delta \varepsilon_g^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\sigma}^T (\varepsilon_g - \varepsilon) + \delta \varepsilon^T (\partial_\varepsilon W - \boldsymbol{\sigma}) \\ &\quad + \delta \boldsymbol{\alpha}^T (\partial_\alpha W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}}) + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}] dA \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dA - \int_{\Gamma_{0\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.98)$$

3.6.5 Linearisierung der schwachen Form

Die in Gleichung (3.98) hergeleitete Variationsformulierung ist nichtlinear. Wie in Abschnitt 2.6 gezeigt, ist es für die Anwendung des Newton-Verfahrens notwendig, die schwache Form, beziehungsweise ihre nichtlinearen Anteile, zu linearisieren. Hierfür wird analog zu Gleichung (2.123) für $g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta})$ eine Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied

$$L[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}), \Delta\boldsymbol{\theta}] := g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) + D[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta})] \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} \quad (3.99)$$

durchgeführt. Darin ist $\Delta\boldsymbol{\theta} = [\Delta\mathbf{v}, \Delta\boldsymbol{\sigma}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\boldsymbol{\alpha}, \Delta\boldsymbol{\lambda}]$ der Vektor der linearisierten Größen. Der zweite Term in Gleichung (3.99) ist die Richtungsableitung des Prinzips der virtuellen Arbeit und folgt aus

$$D[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta})] \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = \frac{d}{d\varepsilon} [g(\boldsymbol{\theta} + \varepsilon\Delta\boldsymbol{\theta}), \delta\boldsymbol{\theta}]_{\varepsilon=0} \quad (3.100)$$

Die Linearisierung der Schnittgrößen aus den Gleichungen (3.42) und (3.43) liefert

$$\begin{bmatrix} \Delta\partial_{\varepsilon}W \\ \Delta\partial_{\alpha}W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_{\alpha\beta} = \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{A}_{\alpha}^T \mathbf{C} \mathbf{A}_{\beta} \bar{\mu} d\xi^3 \quad (3.101)$$

Mit den Matrizen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 folgt durch Aufsummierung über die Schichten, numerischer Integration und mit $d\xi^3 = \frac{h^i}{2} d\zeta$

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^3 \mathbf{A}_{\alpha}^T(\zeta_j) \mathbf{C} \mathbf{A}_{\beta}(\zeta_j) \bar{\mu} \frac{h^i}{2} w_j \quad (3.102)$$

Dabei ist ζ_j die normierte Koordinate in Dickenrichtung und w_j die Wichtungsfunktion des jeweiligen Gauss-Punktes. Mit drei Integrationspunkten pro Laminatschicht wird bei elastischem Verhalten die exakte Lösung erhalten. Zusammen mit den konservativen Lasten $\bar{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{q}}$ und $\bar{\mathbf{t}}$ lautet die schwache Form

$$\begin{aligned}
L[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}), \Delta\boldsymbol{\theta}] &= g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}) + Dg \cdot \Delta\boldsymbol{\theta} = g_{ext} + \int_{\Omega_0} \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \boldsymbol{\sigma} \, dA \\
&+ \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_g \\ \delta\boldsymbol{\sigma} \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta\boldsymbol{\alpha} \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon} \\ \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W - \boldsymbol{\sigma} \\ \partial_{\boldsymbol{\alpha}} W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_g \\ \Delta\boldsymbol{\sigma} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \right\} dA \quad .
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Um die Gleichung (3.103) vereinfacht darstellen zu können, werden der Vektor $\boldsymbol{\vartheta} := [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}]^T$ und die Definitionen

$$\boldsymbol{\psi} := \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} W - \boldsymbol{\sigma} \\ \partial_{\boldsymbol{\alpha}} W + \mathbf{D}_{23} \boldsymbol{\lambda} - \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & 0 \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_{23} \\ 0 & \mathbf{D}_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

eingeführt. Die Matrix $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ ist singulär (acht Nulleigenwerte) und besitzt die Ordnung $29 + M$. Damit folgt für die linearisierte Form der Ausdruck

$$\begin{aligned}
L[g(\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\theta}), \Delta\boldsymbol{\theta}] &= g_{ext} + \int_{\Omega_0} \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^T \boldsymbol{\sigma} \, dA \\
&+ \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_g \\ \delta\boldsymbol{\sigma} \\ \delta\boldsymbol{\vartheta} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g - \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{I}^T \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_g \\ \Delta\boldsymbol{\sigma} \\ \Delta\boldsymbol{\vartheta} \end{bmatrix} \right\} dA, \tag{3.105}
\end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, dass die kinematischen Randbedingungen $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ auf dem Rand Γ_{0u} erfüllt sind.

In der Formulierung der schwachen Form treten neben den linearisierten Verzerrungen $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ zusätzlich die linearisierten virtuellen Verzerrungen $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ auf. Analog zur Herleitung der Variation der Schalenverzerrungen in Gleichung (3.44) folgt die

Linearisierung der Membranverzerrungen, Krümmungen und Schubverzerrungen durch

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} + \Delta\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) , \\ \Delta\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \Delta\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} + \Delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} + \Delta\mathbf{d}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) , \\ \Delta\gamma_{\alpha} &= \Delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha} .\end{aligned}\tag{3.106}$$

Die linearisierten virtuellen Verzerrungen ergeben sich aus der Richtungsableitung zu

$$\begin{aligned}\Delta\delta\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \delta\mathbf{x}_{,\beta} + \Delta\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \delta\mathbf{x}_{,\alpha}) , \\ \Delta\delta\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta\mathbf{d}_{,\beta} + \delta\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \Delta\mathbf{d}_{,\alpha} + \delta\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,\beta} \\ &\quad + \delta\mathbf{d}_{,\beta} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta\delta\mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \Delta\delta\mathbf{d}_{,\alpha}) , \\ \Delta\delta\gamma_{\alpha} &= \delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta\delta\mathbf{d} .\end{aligned}\tag{3.107}$$

$$\Delta\delta\gamma_{\alpha} = \delta\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,\alpha} + \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \Delta\delta\mathbf{d} .\tag{3.108}$$

Die Linearisierung der Variation des Direktors $\Delta\delta\mathbf{d}$ ist algebraisch aufwendig. Sie wird in [30] hergeleitet. An dieser Stelle soll sie nur in verkürzter Form zusammengefasst werden. In Gleichung (3.107) tritt das Skalarprodukt eines Vektors mit der linearisierten Variation des Direktors $\Delta\delta\mathbf{d}$ auf. Für einen beliebigen Vektor \mathbf{h} aus \mathbb{R}^3 gilt hierfür

$$\mathbf{h} \cdot \Delta\delta\mathbf{d} = \mathbf{h} \cdot \Delta(\delta\mathbf{w} \times \mathbf{d}) = \delta\mathbf{w} \cdot \mathbf{M}\Delta\mathbf{w}\tag{3.109}$$

mit der Linearisierung $\Delta\mathbf{w} = \bar{\mathbf{H}}\Delta\omega$ nach Gleichung (3.46) und

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{h} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{d}) + \frac{1}{2} (\mathbf{t} \otimes \omega + \omega \otimes \mathbf{t}) + c_1 \mathbf{1} .\tag{3.110}$$

Der Vektor \mathbf{t} ist definiert durch

$$\mathbf{t} = -c_2 (\mathbf{d} \times \mathbf{h}) + c_3 [(\mathbf{d} \times \mathbf{h}) \cdot \omega] \omega .\tag{3.111}$$

Des Weiteren sind die Konstanten c_1 , c_2 und c_3 als

$$c_1 = \frac{\sin \omega - \omega}{2\omega (\cos \omega - 1)} [(\mathbf{d} \times \mathbf{h}) \cdot \omega] - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{h})\tag{3.112}$$

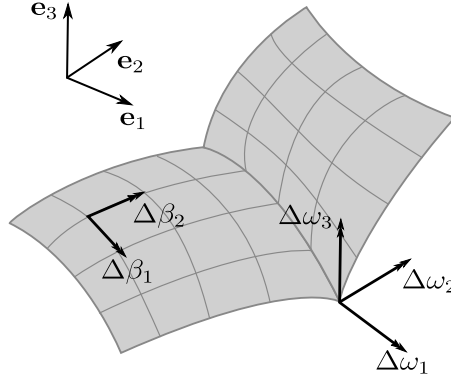


Abbildung 3.6: Rotationsfreiheitsgrade an Verschneidungsstellen

und

$$c_2 = \frac{\omega \sin \omega + 2 \cos \omega - 2}{\omega^2 (\cos \omega - 1)} \quad \text{bzw.} \quad c_3 = \frac{4 (\cos \omega - 1) + \omega^2 + \omega \sin \omega}{2\omega^4 (\cos \omega - 1)} \quad (3.113)$$

definiert. Die Größen des Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$, des Vektors \mathbf{w} und des Tensors $\bar{\mathbf{H}}$ sind in Abschnitt 3.6.1 beschrieben. Die Transformation des Vektors der linearisierten Rotationen in das lokale Koordinatensystem wird analog zu Gleichung (3.50), mit

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \bar{\mathbf{T}} \Delta \boldsymbol{\beta} \quad (3.114)$$

beschrieben. Die Rotationsfreiheitsgrade an Verschneidungsstellen sind in Abb. 3.6 dargestellt. Die Matrix $\bar{\mathbf{T}}$ bleibt dabei unverändert zu Gleichung (3.51) und für $\Delta \boldsymbol{\beta}$ gilt nun

$$\Delta \boldsymbol{\beta} = \begin{cases} [\Delta \omega_1, \Delta \omega_2, \Delta \omega_3] & \text{für Punkte an Schalenverschneidungen} \\ [\Delta \beta_1, \Delta \beta_2] & \text{für alle anderen Punkte} \end{cases} \quad (3.115)$$

An dieser Stelle ist die nichtlineare Schalentheorie, inklusive des zusätzlichen Verschiebungsfeldes der Verwölbungen und relativen Verschiebungen in Dickenrichtung, vollständig definiert.

Kapitel 4

Finite-Element-Formulierung

Im vorhergehenden Kapitel wurden die Grundgleichungen der nichtlinearen Schalentheorie aufgezeigt und die schwache Form hergeleitet. Es bildet in seiner linearisierten Form die Grundlage für die Finite-Elemente-Formulierung.

Für die Approximation der Referenz- und Momentankonfiguration der Schalenreferenzfläche wird das isoparametrische Konzept auf ein 4-Knoten-Schalenelement angewendet. Die Geometrie der Schale wird folglich mit denselben Ansatzfunktionen interpoliert wie die Verschiebungsgrößen.

Wie bei der Herleitung der Schalentheorie existiert auch bezüglich ihrer numerischen Umsetzung mittels finiter Elemente eine Vielzahl unterschiedlicher Vorgehensweisen. An dieser Stelle sei auf die Veröffentlichungen von [9, 11, 44, 109, 117] und [118] hingewiesen. Die Finite-Elemente-Formulierung in dieser Arbeit basiert auf [104] und wird im Folgenden zusammengefasst. Es wurde bereits gezeigt, dass die Elementformulierung auf einem gemischten Funktional basiert. Daher werden die Interpolationen der Verschiebungsgrößen, der unabhängigen Verzerrungen, der unabhängigen Schnittgrößen und der aus dem zusätzlichen Verschiebungsfeld $\tilde{\mathbf{u}}$ resultierenden Größen, gezeigt.

4.1 Approximation der Schallengeometrie

Die Schalenreferenzfläche wird in der Referenzkonfiguration mit denselben Ansatzfunktionen für den Ortsvektor \mathbf{X} und den Direktor \mathbf{N} interpoliert, sodass

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{X}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{N}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{N}_I \quad (4.1)$$

gilt. Der Exponent $(\cdot)^h$ zeigt an, dass es sich um approximierte Größen handelt, während der Index $(\cdot)_I$ auf die Knotennummer verweist. Er nimmt dabei die Werte 1 bis 4 an. Die bilinearen Ansätze in Gleichung (4.1) sind wie folgt definiert

$$N_I = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad . \quad (4.2)$$

Die Koordinaten $\xi = \xi^1$ und $\eta = \xi^2$ sind normiert und bilden das Einheitsquadrat mit $\xi, \eta \in [-1, 1]$ auf die Referenzfläche in der Referenzkonfiguration ab, siehe Abb. 4.1. Für die einzelnen Knoten folgen für die Knotenkoordinaten im Einheitsquadrat ξ_I und η_I die Ansätze

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) , & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) , \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \quad \text{und} \quad N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

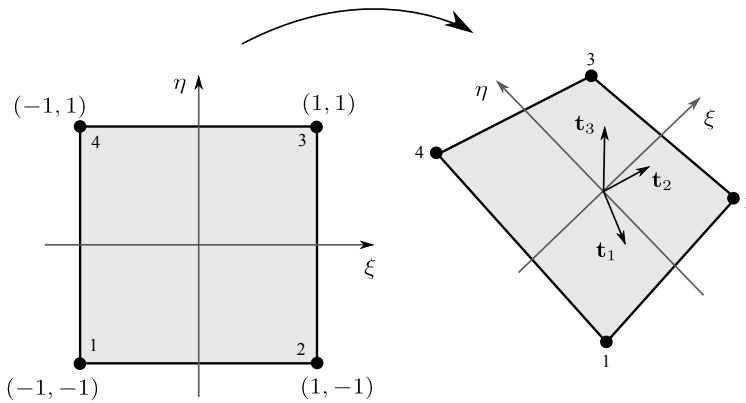


Abbildung 4.1: Abbildung des Einheitsquadrats auf Referenzfläche

Die Vektoren der Knotenpositionen werden, wie auch das lokale Basissystem $[\mathbf{A}_{1I}$,

$\mathbf{A}_{2I}, \mathbf{A}_{3I}]$, im Zuge der Netzgenerierung definiert. Der Direktor $\mathbf{N}_I = \mathbf{A}_{3I}$ steht dabei senkrecht auf der Schalenreferenzfläche Ω . Für jedes Element wird die kartesische Knotenbasis \mathbf{t}_i definiert. Dazu werden zunächst die Vektoren

$$\bar{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{d}}_2 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_4 \quad (4.4)$$

bzw.

$$\hat{\mathbf{d}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_1}{|\bar{\mathbf{d}}_1|} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{d}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_2}{|\bar{\mathbf{d}}_2|} \quad (4.5)$$

gebildet. Mit diesen lässt sich die kartesische Knotenbasis als

$$\mathbf{t}_1 = \frac{(\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2)}{|\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2|}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{(\hat{\mathbf{d}}_1 - \hat{\mathbf{d}}_2)}{|\hat{\mathbf{d}}_1 - \hat{\mathbf{d}}_2|} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 \quad (4.6)$$

ausdrücken. Die Vektoren \mathbf{t}_α spannen dabei eine Ebene auf. Der Vektor \mathbf{t}_3 steht senkrecht auf dieser, wie in Abb. 4.1 gezeigt. Die kartesische Knotenbasis bildet die Grundlage für das in Abschnitt 2.5.2 vorgestellte transversal-isotrope Materialmodell. Dabei findet eine Transformation der lokalen Materialkoordinaten in das Elementkoordinatensystem statt. Neben der Definition des Elementkoordinatensystems nach Gleichung (4.6) sind weitere Möglichkeiten denkbar. In [44] wird beispielsweise ein laminares Koordinatensystem vorgeschlagen.

Im Folgenden werden die Ableitungen der interpolierten Größen \mathbf{X}_α^h und \mathbf{N}_α^h nach den Schalenkoordinaten ξ_1 und ξ_2 benötigt. Die Ansatzfunktionen sind jedoch in den natürlichen Koordinaten des Einheitsquadrats definiert. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen wird durch die *Jacobi-Matrix* hergestellt. Die Ableitungen der Ansatzfunktionen werden durch

$$\begin{bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

beschrieben. Darin ist \mathbf{J}^{-1} die Inverse der *Jacobi-Matrix* \mathbf{J} , welche als

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{,\xi}^h \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_{,\xi}^h \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{X}_{,\eta}^h \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{X}_{,\eta}^h \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

definiert ist. Die Ableitungen der Ortsvektoren ergeben sich zu

$$\mathbf{X}_{,\xi}^h = \mathbf{G}_\xi^0 + \eta \mathbf{G}^1 \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{,\eta}^h = \mathbf{G}_\eta^0 + \xi \mathbf{G}^1 \quad (4.9)$$

mit den Vektoren der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{G}_\xi^0 = \frac{1}{4} \sum_{I=1}^4 \xi_I \mathbf{X}_I, \quad \mathbf{G}_\eta^0 = \frac{1}{4} \sum_{I=1}^4 \eta_I \mathbf{X}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^1 = \frac{1}{4} \sum_{I=1}^4 \xi_I \eta_I \mathbf{X}_I \quad . \quad (4.10)$$

Die Inverse der *Jacobi-Matrix* folgt damit zu

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{J} = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad . \quad (4.11)$$

Nachdem es nun möglich ist, die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach kartesischen Koordinaten durch die *Jacobi-Matrix* auszudrücken, folgen für die Tangentenvektoren $\mathbf{X}_{,\alpha}$ und die Ableitung des Direktors $\mathbf{N}_{,\alpha}$ die Ausdrücke

$$\mathbf{X}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{X}_I \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{N}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{N}_I \quad . \quad (4.12)$$

In Hinblick auf gekrümmte oder verwölbte Elemente liefert $\mathbf{X}_{,\alpha}^h = \mathbf{t}_\alpha$ in der Elementmitte. An allen übrigen Punkten des Elements stellt $\mathbf{X}_{,\alpha}^h$ in diesem Fall eine Näherung dar. Für die Schalenmittelfläche in der Momentankonfiguration gilt für den Ortsvektor \mathbf{x}^h und den Direktor \mathbf{d}^h analog zu Gleichung (4.2)

$$\mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{x}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{d}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{d}_I \quad . \quad (4.13)$$

Hierbei beschreibt $\mathbf{x}_I = \mathbf{X}_I + \mathbf{u}_I$ die aktuelle Knotenposition. Der aktuelle Knotendirektor ist als $\mathbf{d}_I = \mathbf{R} \mathbf{N}_I$ definiert und folgt aus der Rotation des Direktors der Referenzkonfiguration. Die Rotationsmatrix und deren Formulierung durch die Rodrigues-Formel wurden in Abschnitt 3.2 in den Gleichungen (3.13) bis (3.16) gezeigt. Dabei gilt, dass das Vorgehen frei von Singularitäten für $\omega_I = |\boldsymbol{\omega}_I| < 2\pi$ ist. Für größere Rotation wird ein multiplikatives Update nach einer Unterteilung der Rotation in mehrere Lastinkremente durchgeführt.

Die Ableitungen des Vektors \mathbf{x}^h und des Direktors \mathbf{d}^h lauten analog zu Gleichung (4.1)

$$\mathbf{x}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{x}_I \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{d}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \mathbf{d}_I \quad . \quad (4.14)$$

Mit den Definitionen der Schalenverzerrungen in Gleichung (3.24) werden nun die Näherungen der Membranverzerrungen $\varepsilon_{\alpha\beta}^h$, Krümmungen $\kappa_{\alpha\beta}^h$ und Querschubverzerrungen γ_{α}^h formuliert. Schalenelemente sind anfällig für Versteifungseffekte, wie Membran- oder Schub-Locking [34]. Ersteres tritt auf, wenn bei gekrümmten Schalen Biegezustände nicht ohne Aktivierung der Membranzustände darstellbar sind. Schub-Locking ist bei Elementen niedriger Ansatzordnung zu beobachten. Hierbei können sich reine Biegezustände nicht ohne Aktivierung von Querschubverzerrungen einstellen. Daraus resultiert eine zusätzliche Steifigkeit, die zu falschen Ergebnissen führt. Diesem Problem kann beispielsweise mit einer reduzierten Integration entgegengewirkt werden. Dies führt zu einer weicheren Systemantwort. Die Unterintegration kann jedoch zu ungewollten Effekten wie Hourglassing führen und ist damit nur für bestimmte Problemstellungen sinnvoll.

Für das hier gezeigte Schalenelement wird ein anderes Vorgehen gewählt. Dabei werden unabhängige Ansätze für die Querschubverzerrungen angenommen, wie es DVORKIN und BATHE in [25] vorschlagen. Dies wird an den Seitenmittelnknoten A, B, C, D durchgeführt, siehe Abb. 4.2.

Die Interpolation der Querschubverzerrungen lautet mit den Elementkoordinaten ξ und η

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\xi}^h \\ \gamma_{\eta}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) \gamma_{\xi}^B + (1 + \eta) \gamma_{\xi}^D \right] \\ \frac{1}{2} \left[(1 - \xi) \gamma_{\eta}^A + (1 + \xi) \gamma_{\eta}^C \right] \end{bmatrix} \quad . \quad (4.15)$$

Die Querschubverzerrungen in den Seitenmittelnknoten werden berechnet mit

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi}^M &= [\mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\xi} \cdot \mathbf{N}]^M & \text{mit } M &= B, D, \\ \gamma_{\eta}^L &= [\mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\eta} \cdot \mathbf{N}]^L & \text{mit } L &= A, C \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Direktorvektoren der Seitenmittelnknoten folgen aus linearer Interpolation der

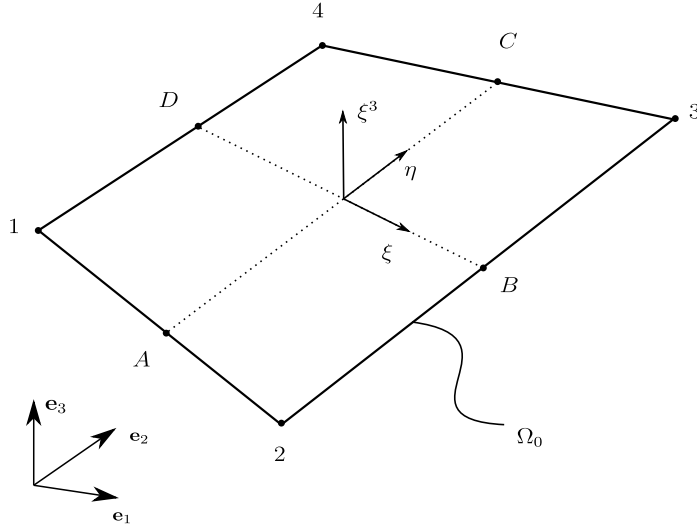


Abbildung 4.2: Seitenmittelnknoten der Schale

Direktoren der Eckknoten zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}^A &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_4 + \mathbf{d}_1), & \mathbf{d}^B &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2), \\
 \mathbf{d}^C &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3), & \mathbf{d}^D &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4), \\
 \mathbf{N}^A &= \frac{1}{2} (\mathbf{N}_4 + \mathbf{N}_1), & \mathbf{N}^B &= \frac{1}{2} (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2), \\
 \mathbf{N}^C &= \frac{1}{2} (\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3), & \mathbf{N}^D &= \frac{1}{2} (\mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_4) \quad .
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die Ableitungen der Ortsvektoren der Seitenmittelnknoten sind analog dazu durch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{,\eta}^A &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1), & \mathbf{x}_{,\xi}^B &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \\
 \mathbf{x}_{,\eta}^C &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2), & \mathbf{x}_{,\xi}^D &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4), \\
 \mathbf{X}_{,\eta}^A &= \frac{1}{2} (\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_1), & \mathbf{x}_{,\xi}^B &= \frac{1}{2} (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1), \\
 \mathbf{X}_{,\eta}^C &= \frac{1}{2} (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2), & \mathbf{x}_{,\xi}^D &= \frac{1}{2} (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

definiert. Somit können die interpolierten Schalenverzerrungen entsprechend zu

Gleichung (3.25) in dem Vektor ε_g^h zusammengefasst werden

$$\varepsilon_g^h = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^h \\ \varepsilon_{22}^h \\ 2\varepsilon_{12}^h \\ \kappa_{11}^h \\ \kappa_{22}^h \\ 2\kappa_{12}^h \\ \gamma_1^h \\ \gamma_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{X}_{,1}^h) \\ \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,2}^h \cdot \mathbf{X}_{,2}^h) \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{X}_{,2}^h \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{d}_{,1}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{N}_{,1}^h \\ \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{d}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,2}^h \cdot \mathbf{N}_{,2}^h \\ \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{d}_{,2}^h + \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{d}_{,1}^h - \mathbf{X}_{,1}^h \cdot \mathbf{N}_{,2}^h - \mathbf{X}_{,2}^h \cdot \mathbf{N}_{,1}^h \\ \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} [(1-\eta) \gamma_\xi^B + (1+\eta) \gamma_\xi^D] \\ \frac{1}{2} [(1-\xi) \gamma_\eta^A + (1+\xi) \gamma_\eta^C] \end{array} \right\} \end{bmatrix} . \quad (4.19)$$

Der Index g verdeutlicht, dass Gleichung (4.19) die geometrischen Verzerrungen als Funktion der Schalenverschiebungen enthält. Die virtuellen Schalenverzerrungen folgen unter Berücksichtigung von Gleichung (3.44). Sie werden in dem Vektor $\delta\varepsilon_g^h$ zu

$$\delta\varepsilon_g^h = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{11}^h \\ \delta\varepsilon_{22}^h \\ 2\delta\varepsilon_{12}^h \\ \delta\kappa_{11}^h \\ \delta\kappa_{22}^h \\ 2\delta\kappa_{12}^h \\ \delta\gamma_1^h \\ \delta\gamma_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h + \delta\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{d}_{,1}^h + \delta\mathbf{d}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{d}_{,2}^h + \delta\mathbf{d}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta\mathbf{x}_{,1}^h \cdot \mathbf{d}_{,2}^h + \delta\mathbf{x}_{,2}^h \cdot \mathbf{d}_{,1}^h + \delta\mathbf{d}_{,1}^h \cdot \mathbf{x}_{,2}^h + \delta\mathbf{d}_{,2}^h \cdot \mathbf{x}_{,1}^h \\ \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} [(1-\eta) \delta\gamma_\xi^B + (1+\eta) \delta\gamma_\xi^D] \\ \frac{1}{2} [(1-\xi) \delta\gamma_\eta^A + (1+\xi) \delta\gamma_\eta^C] \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

zusammengefasst. Die Variationen der unabhängigen, an den Seitenmittelnknoten interpolierten, Querschubverzerrungen in Gleichung (4.20) folgen entsprechend Gleichung (4.16) zu

$$\begin{aligned} \delta\gamma_\xi^M &= [\delta\mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \delta\mathbf{d}]^M \quad \text{mit} \quad M = B, D, \\ \delta\gamma_\eta^L &= [\delta\mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \delta\mathbf{d}]^L \quad \text{mit} \quad L = A, C . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Variationen $\delta\mathbf{x}_{,\xi}$, $\delta\mathbf{x}_{,\eta}$ und $\delta\mathbf{d}$ werden mit den Größen analog zu den Gleichungen (4.17) und (4.18) bestimmt. Die Ableitungen der Variationen $\delta\mathbf{x}^h$ und $\delta\mathbf{d}^h$

folgen unter Verwendung von Gleichung (4.14) zu

$$\delta \mathbf{x}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \delta \mathbf{u}_I \quad \text{bzw.} \quad \delta \mathbf{d}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \delta \mathbf{d}_I \quad . \quad (4.22)$$

Die Variation des Direktors $\delta \mathbf{d}_I$ wurde in Gleichung (3.53) definiert und lautet in der Schreibweise der Knotengrößen

$$\delta \mathbf{d}_I = \mathbf{W}_I^T \bar{\mathbf{H}}_I \bar{\mathbf{T}}_I \delta \boldsymbol{\beta}_I \quad . \quad (4.23)$$

Somit können die Variationen der Schalenverzerrungen als Ableitungen der Knotenverschiebungen dargestellt werden. Dies liefert mit den Gleichungen (4.1) und (4.22)

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h = \sum_{I=1}^4 \underbrace{\begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{x}_{,1}^T & \mathbf{0} \\ N_{I,2} \mathbf{x}_{,2}^T & \mathbf{0} \\ N_{I,1} \mathbf{x}_{,2}^T + N_{I,2} \mathbf{x}_{,1}^T & \mathbf{0} \\ N_{I,1} \mathbf{d}_{,1}^T & N_{I,1} \mathbf{b}_{I1}^T \\ N_{I,2} \mathbf{d}_{,2}^T & N_{I,2} \mathbf{b}_{I2}^T \\ N_{I,1} \mathbf{d}_{,2}^T + N_{I,2} \mathbf{d}_{,1}^T & N_{I,1} \mathbf{b}_{I2}^T + N_{I,2} \mathbf{b}_{I1}^T \\ \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \mathbf{d}_M^T \\ N_{I,\eta} \mathbf{d}_L^T \end{Bmatrix} & \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \mathbf{b}_M^T \\ N_{I,\eta} \mathbf{b}_L^T \end{Bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_I \\ \delta \boldsymbol{\beta}_I \end{bmatrix}}_{\delta \hat{\mathbf{v}}_I} \quad . \quad (4.24)$$

Auf den Index $(\cdot)^h$ wurde in Gleichung (4.24) aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Außerdem wurden die folgenden Definitionen

$$\mathbf{b}_{I\alpha} = \tilde{\mathbf{K}}_I^T \mathbf{x}_{,\alpha}, \quad \mathbf{b}_M = \tilde{\mathbf{K}}_I^T \mathbf{x}_{,\xi}^M \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_L = \tilde{\mathbf{K}}_I^T \mathbf{x}_{,\eta}^L \quad (4.25)$$

verwendet, mit $\tilde{\mathbf{K}}_I^T = \mathbf{W}_I^T \bar{\mathbf{H}}_I \bar{\mathbf{T}}_I^T$. Die Zuordnung der Seitenmittelnknoten ist durch

$$(I, M, L) \in \{(1, B, A); (2, B, C); (3, D, C); (4, D, A)\} \quad (4.26)$$

gegeben und in Abb. 4.2 gezeigt. Die Variationen der Verzerrungen lassen sich durch die Matrix \mathbf{B}_I zu

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \delta \hat{\mathbf{v}}_I = \mathbf{B} \delta \hat{\mathbf{v}} \quad (4.27)$$

zusammenfassen.

Die Linearisierung der schwachen Form nach Gleichung (3.103) beinhaltet die linearisierten Schalenverzerrungen $\Delta \varepsilon_g^h$, welche auf dieselbe Weise bestimmt werden wie die Variationen $\delta \varepsilon_g^h$. Die Ableitungen der interpolierten linearisierten Vektoren ergeben

$$\Delta \mathbf{x}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \Delta \mathbf{u}_I \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{d}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \Delta \mathbf{d}_I \quad . \quad (4.28)$$

Damit folgen die linearisierten approximierten Schalenverzerrungen aus

$$\Delta \varepsilon_g^h = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \Delta \hat{\mathbf{v}}_I = \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{v}} \quad (4.29)$$

durch Ersetzen des Variationsoperators δ durch den Linearisierungsoperator Δ in Gleichung (4.20).

Die Linearisierung nach Gleichung (3.103) beinhaltet die linearisierte Variationen der Schalenverzerrungen $\Delta \delta \varepsilon_g$. Diese werden ebenfalls in einem Vektor zusammengefasst und lauten

$$\Delta \delta \varepsilon_g^h = \begin{bmatrix} \Delta \delta \varepsilon_{11}^h \\ \Delta \delta \varepsilon_{22}^h \\ 2\Delta \delta \varepsilon_{12}^h \\ \Delta \delta \kappa_{11}^h \\ \Delta \delta \kappa_{22}^h \\ 2\Delta \delta \kappa_{12}^h \\ \Delta \delta \gamma_1^h \\ \Delta \delta \gamma_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,2}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,2}^h + \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,1}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{d}_{,1}^h + \delta \mathbf{d}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,1}^h + \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \delta \mathbf{d}_{,1}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{d}_{,2}^h + \delta \mathbf{d}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,2}^h + \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \delta \mathbf{d}_{,2}^h \\ \delta \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{d}_{,2}^h + \delta \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{d}_{,1}^h + \delta \mathbf{d}_{,1}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,2}^h + \delta \mathbf{d}_{,2}^h \cdot \Delta \mathbf{x}_{,1}^h \\ + \mathbf{x}_{,1}^h \cdot \Delta \delta \mathbf{d}_{,2}^h + \mathbf{x}_{,2}^h \cdot \Delta \delta \mathbf{d}_{,1}^h \\ \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[(1 - \eta) \Delta \delta \gamma_\xi^B + (1 + \eta) \Delta \delta \gamma_\xi^D \right] \\ \frac{1}{2} \left[(1 - \xi) \Delta \delta \gamma_\eta^A + (1 + \xi) \Delta \delta \gamma_\eta^C \right] \end{array} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta \delta \gamma_\xi^M &= [\delta \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \Delta \mathbf{d} + \Delta \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \delta \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \Delta \delta \mathbf{d}]^M \quad \text{mit} \quad M = B, D, \\ \Delta \delta \gamma_\eta^L &= [\delta \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \Delta \mathbf{d} + \Delta \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \delta \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \Delta \delta \mathbf{d}]^L \quad \text{mit} \quad L = A, C \quad . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Ableitung der linearisierten Variation des Direktors $\Delta\delta\mathbf{d}_{,\alpha}^h$ ist durch

$$\Delta\delta\mathbf{d}_{,\alpha}^h = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha} \Delta\delta\mathbf{d}_I \quad (4.32)$$

definiert. Die darin enthaltene zweite Variation des Direktors $\Delta\delta\mathbf{d}$ wurde in Gleichung (3.109) hergeleitet. Diese Vorgehensweise findet im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Formulierung ebenfalls Anwendung. Es gilt somit für einen beliebigen Vektor $\mathbf{h}_I \in R^3$

$$\mathbf{h}_I \cdot \Delta\delta\mathbf{d}_I = \mathbf{h}_I \cdot \Delta(\delta\mathbf{w}_I \times \mathbf{d}_I) = \delta\mathbf{w}_I \cdot \mathbf{M}_I \Delta\mathbf{w}_I \quad . \quad (4.33)$$

Damit gilt Gleichung (4.33) auch für den Vektor der Knotenkoordinaten \mathbf{x}_I . Das Produkt der zweiten Variation der Schalenverzerrungen $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^h$ und dem Vektor der unabhängigen Schnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}^h$ aus Gleichung (3.94) kann mit den Gleichungen (4.30)-(4.33) bestimmt werden zu

$$\begin{aligned} \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_g^{hT} \boldsymbol{\sigma}^h &= \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \delta\hat{\mathbf{v}}_I^T \mathbf{k}_{\sigma IK} \Delta\hat{\mathbf{v}}_K \\ &= \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_I, & \delta\boldsymbol{\beta}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{n}_{IK} \mathbf{1} & (\hat{m}_{IK} + \hat{q}_{IK}^{uw}) \tilde{\mathbf{K}}_K \\ (\hat{m}_{IK} + \hat{q}_{IK}^{wu}) \tilde{\mathbf{K}}_I & \delta_{IK} \hat{\mathbf{M}}_I(\mathbf{h}_I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}_K \\ \Delta\boldsymbol{\beta}_K \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Einträge der Matrix $\mathbf{k}_{\sigma IK}$ folgen nach [104] zu

$$\begin{aligned} \hat{n}_{IK} &= n^{11} N_{I,1} N_{K,1} + n^{22} N_{I,2} N_{K,2} + n^{12} (N_{I,1} N_{K,2} + N_{I,2} N_{K,1}) \\ \hat{m}_{IK} &= m^{11} N_{I,1} N_{K,1} + m^{22} N_{I,2} N_{K,2} + m^{12} (N_{I,1} N_{K,2} + N_{I,2} N_{K,1}) \\ \hat{q}_{IK}^{uw} &= \frac{1}{2} (q^\xi N_{I,\xi} f_{IK}^1 + q^\eta N_{I,\eta} f_{IK}^2) \\ \hat{q}_{IK}^{wu} &= \frac{1}{2} (q^\xi N_{K,\xi} f_{IK}^1 + q^\eta N_{K,\eta} f_{IK}^2) \\ \hat{\mathbf{M}}_I &= \bar{\mathbf{T}}_I^T \bar{\mathbf{H}}_I^T \mathbf{M}_I(\mathbf{h}_I) \bar{\mathbf{H}}_I^T \bar{\mathbf{T}}_I \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit der Matrix $\mathbf{M}_I(\mathbf{h}_I)$ aus Gleichung (3.110) und

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_I &= m^{11} N_{I,1} \mathbf{x}_{,1}^h + m^{22} N_{I,2} \mathbf{x}_{,2}^h + m^{12} (N_{I,2} \mathbf{x}_{,1}^h + N_{I,1} \mathbf{x}_{,2}^h) \\ &\quad + q^\xi N_{I,\xi} \xi_I \mathbf{x}_{,\xi}^M + q^\eta N_{I,\eta} \eta_I \mathbf{x}_{,\eta}^L \quad . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Die verbleibenden Größen lauten

$$f_{IK}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, f_{IK}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} q^\xi \\ q^\eta \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

4.2 Interpolation der unabhängigen Schnittgrößen

Die Ansätze für die Interpolation der unabhängigen Schnittgrößen σ^h werden nach [104] so gewählt, dass sie Standard-Patch-Tests bestehen und numerische Stabilität gewährleisten. Für eine detaillierte Darstellung dieses Sachverhaltes sei ebenfalls auf [104] verwiesen. Das grundlegende Vorgehen basiert auf [76]. Dort wurde die Interpolation für Probleme im ebenen Spannungszustand gezeigt.

Die unabhängigen Schnittgrößen werden mit

$$\sigma^h = \mathbf{N}_\sigma \hat{\sigma} \quad (4.38)$$

approximiert. Die Matrix \mathbf{N}_σ beinhaltet die Ansatzfunktionen und lautet

$$\mathbf{N}_\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\sigma^m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\sigma^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\sigma^s \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

mit den Submatrizen

$$\mathbf{N}_\sigma^m = \mathbf{N}_\sigma^b = \mathbf{T}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_\sigma^s = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Die Matrizen \mathbf{T}_σ^0 und $\tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0$ transformieren kovariante Tensorkomponenten in das Elementkoordinatensystem \mathbf{t}_i nach Gleichung (4.6). Diese Transformationsmatri-

zen sind als

$$\mathbf{T}_\sigma^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 J_{11}^0 & J_{21}^0 J_{21}^0 & 2J_{11}^0 J_{21}^0 \\ J_{12}^0 J_{12}^0 & J_{22}^0 J_{22}^0 & 2J_{12}^0 J_{22}^0 \\ J_{11}^0 J_{12}^0 & J_{21}^0 J_{22}^0 & J_{11}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{21}^0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{21}^0 \\ J_{12}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

definiert. Die Matrizen enthalten als Einträge die Komponenten $J_{\alpha\beta}^0$ der *Jacobi-Matrix* \mathbf{J} , welche in Elementmitte ausgewertet werden. Die Konstanten $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ sind durch

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A_e} \int_{\Omega_0} \xi \, dA \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A_e} \int_{\Omega_0} \eta \, dA \quad \text{mit} \quad A_e = \int_{\Omega_0} dA \quad (4.42)$$

gegeben. Der Vektor der Schnittgrößen $\hat{\sigma}$ in Gleichung (4.38) enthält 14 Einträge und setzt sich aus 8 konstanten und 6 veränderlichen Einträgen zusammen. Die Variation und Linearisierung des Vektors der unabhängigen Schnittgrößen lauten somit

$$\delta \sigma^h = \mathbf{N}_\sigma \delta \hat{\sigma} \quad \text{und} \quad \Delta \sigma^h = \mathbf{N}_\sigma \Delta \hat{\sigma} \quad . \quad (4.43)$$

Im nächsten Abschnitt werden die Ansätze für die unabhängigen Verzerrungen und die zusätzlichen kinematischen Größen aufgezeigt.

4.3 Interpolation der unabhängigen Verzerrungen und Verzerrungsableitungen

Die linearisierte schwache Form (3.103) beinhaltet den Vektor ϑ , dessen Approximation sich aus den unabhängigen Verzerrungen ε^h , den Verwölbungen und relativen Verschiebungen in Dickenrichtung α^h und den Ableitungen der Verzerrungen λ^h zusammensetzt. Die Ansatzfunktionen dieser Größen lauten

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^h \\ \alpha^h \\ \lambda^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^1 & \mathbf{N}_\varepsilon^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\varepsilon^3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^2 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\lambda}_3 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\vartheta^h = \mathbf{N}_\vartheta \hat{\vartheta} .$$

Dabei besitzen die Vektoren $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\alpha}$ und $\hat{\lambda}_3$ jeweils 8, 6, 4, M und 11 Einträge. Die Matrizen \mathbf{N}_ε^1 , \mathbf{N}_ε^2 und \mathbf{N}_ε^3 lauten nach [35] im Detail

$$\mathbf{N}_\varepsilon^1 = \mathbf{1}_8, \quad \mathbf{N}_\varepsilon^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^{m2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\varepsilon^{b2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\varepsilon^{s2} \end{bmatrix}_{8 \times 6} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\varepsilon^{m3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\varepsilon^{b3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{8 \times 11}. \quad (4.45)$$

Für die Untermatrizen gilt

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{m2} = \mathbf{N}_\varepsilon^{b2} = \mathbf{T}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & \xi - \bar{\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{s2} = \mathbf{N}_\sigma^s \quad (4.46)$$

bzw.

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{m3} = \frac{j_0}{j} (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \mathbf{M}_4 \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_\varepsilon^{b3} = \frac{j_0}{j} (\tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0)^{-T} \mathbf{M}_7 \quad (4.47)$$

wobei

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Der Faktor j_0 ist durch $j_0 = j$ ($\xi = 0, \eta = 0$) definiert mit $j = |\mathbf{X}_{,\xi}^h \times \mathbf{X}_{,\eta}^h|$ definiert.

Die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 J_{11}^0 & J_{21}^0 J_{21}^0 & J_{11}^0 J_{21}^0 \\ J_{12}^0 J_{12}^0 & J_{22}^0 J_{22}^0 & J_{12}^0 J_{22}^0 \\ 2J_{11}^0 J_{12}^0 & 2J_{21}^0 J_{22}^0 & J_{11}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{21}^0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

beschreibt die Transformation kontravarianter Tensorkomponenten in das kartesische Koordinatensystem [108].

Die Verwölbungen und relativen Verschiebungen in Dickenrichtung $\boldsymbol{\alpha}^h$ werden durch konstante Ansätze im Element interpoliert. Diese werden in dem Vektor $\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{1}_M$ zusammengefasst. Die Matrizen zur Interpolationen der Verzerrungsableitungen $\boldsymbol{\lambda}^h = [\boldsymbol{\lambda}_{\varepsilon 1}^h, \boldsymbol{\lambda}_{\kappa 1}^h, \boldsymbol{\lambda}_{\kappa 2}^h]^T$ in Gleichung (4.44) lauten

$$\mathbf{N}_\lambda^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\lambda^{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{21 \times 4}, \quad \mathbf{N}_\lambda^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\lambda^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\lambda^{311} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_\lambda^{312} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^{321} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^{322} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^{331} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^{332} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\lambda^{333} \end{bmatrix}_{21 \times 11} \quad (4.50)$$

mit

$$\mathbf{N}_\lambda^{311} = (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{2}{\ell}, \quad \mathbf{N}_\lambda^{312} = (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2}{\ell} \quad (4.51)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\lambda^{321} &= (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \frac{2}{\ell}, \\ \mathbf{N}_\lambda^{322} &= (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \frac{2}{\ell}, \\ \mathbf{N}_\lambda^{331} &= (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2}{\ell}, \\ \mathbf{N}_\lambda^{332} &= (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2}{\ell}, \\ \mathbf{N}_\lambda^{333} &= (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2}{\ell}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Der Parameter ℓ wird zu $\ell = 100 \cdot h$ gewählt. Dies hat sich in einer Parameterstudie [28] als zielführend erwiesen. Die Matrix \mathbf{N}_λ^3 ist durch die Ableitung der Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^h$ motiviert. Die Matrix \mathbf{N}_λ^2 ist von $\boldsymbol{\varepsilon}^h$ entkoppelt. Sie stellt somit einen unabhängigen Teil der Approximation dar.

4.4 Approximation des Prinzips der virtuellen Arbeit

In den vorherigen Abschnitten wurden die Interpolationen der Verzerrungen (4.29), der Schnittgrößen (4.38) und der zusätzlichen kinematischen Größen (4.44) gezeigt. Bevor die Ansatzfunktionen in die schwache Form eingesetzt werden können, werden die Variation und die Linearisierung von $\boldsymbol{\psi}^h$ benötigt. Diese lauten

$$\delta \boldsymbol{\theta}^h = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h \\ \delta \boldsymbol{\sigma}^h \\ \delta \boldsymbol{\vartheta}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{v}} \\ \delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \delta \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

und

$$\Delta \boldsymbol{\theta}^h = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}^h \\ \Delta \boldsymbol{\vartheta}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{v}} \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\vartheta}} \end{bmatrix} . \quad (4.54)$$

Eingesetzt in die linearisierte schwache Form nach Gleichung (3.103) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta \boldsymbol{\theta}^h), \Delta \boldsymbol{\theta}^h] &= \sum_{e=1}^{numel} \left(g_{ext}^{eh} + \int_{\Omega_e} \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^{hT} \boldsymbol{\sigma}^h dA \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h \\ \delta \boldsymbol{\sigma}^h \\ \delta \boldsymbol{\vartheta}^h \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^h \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g^h - \boldsymbol{\varepsilon}^h \\ \boldsymbol{\psi}^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{I}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_g^h \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}^h \\ \Delta \boldsymbol{\vartheta}^h \end{bmatrix} \right\} dA \right) . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der Zähler *numel* steht für die Gesamtzahl der Elemente im System. Mit $g_{ext}^{eh} = -\delta \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{f}^a$ wird die Arbeit der äußeren Lasten zusammengefasst. Der Vektor \mathbf{f}^a beinhaltet den Vektor der äußeren Lasten $\bar{\mathbf{p}}$ und $\bar{\mathbf{t}}$. Die Matrix \mathbf{I} wurde in Gleichung (3.104) als $\mathbf{I} := [-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$ definiert. Mit den Ansätzen der unabhängigen

Größen aus den Gleichungen (4.38) und (4.44) folgt

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{v}} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a \\ \mathbf{f}^s \\ \mathbf{f}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{v}} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.56)$$

mit den Untermatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_{\vartheta}^T \mathbf{I} \mathbf{N}_{\sigma} dA, & \mathbf{f}^i &= \int_{\Omega_0} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h dA, \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_{\sigma} \mathbf{B} dA, & \mathbf{f}^s &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_g^h - \boldsymbol{\varepsilon}^h) dA, \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_{\vartheta}^T \mathbf{D} \mathbf{N}_{\vartheta} dA, & \mathbf{f}^e &= \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_{\vartheta}^T \boldsymbol{\psi}^h dA, \\ \mathbf{K}_g &= \int_{\Omega_0} \mathbf{k}_{\sigma} dA. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Die Matrix \mathbf{K}_g in Gleichung (4.56) folgt aus der geometrischen Matrix \mathbf{k}_{σ} , welche in Gleichung (4.34) definiert wurde. Die Integrale in Gleichung (4.57) werden numerisch mit einer 2×2 -Gauss-Integration ausgewertet. Für das infinitesimale Flächenelement folgt $dA = |\mathbf{X}_{,\xi}^h \times \mathbf{X}_{,\eta}^h| d\xi d\eta$. Mit der Annahme $\delta\boldsymbol{\theta}^h \neq 0$ resultieren für $L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = 0$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g \Delta\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{G}^T \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a &= \mathbf{r}, \\ \mathbf{G} \Delta\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{F}^T \Delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{f}^s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{H} \Delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \mathbf{F} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^e &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Dabei ist \mathbf{r} der Vektor der Elementknotenkräfte. Wie bereits erwähnt, sind die unabhängigen Größen $\Delta\boldsymbol{\vartheta}^h$ und $\Delta\boldsymbol{\sigma}^h$ diskontinuierlich zwischen einzelnen Elementen interpoliert. Aus diesem Grund können $\Delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^h$ und $\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}^h$ aus dem Gleichungssatz in Gleichung (4.58) durch statische Kondensation eliminiert werden. Hierfür erfolgt eine Umstellung der Gleichungen nach den zu eliminierenden Größen

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}} &= -\mathbf{H}^{-1} (\mathbf{F} \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^e), \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \hat{\mathbf{H}} (\mathbf{G} \Delta\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{f}^s - \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}^e) \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Mit diesen Umformungen lautet das linearisierte Prinzip der virtuellen Arbeit nach

Gleichung (4.56)

$$L[g(\boldsymbol{\theta}^h, \delta\boldsymbol{\theta}^h), \Delta\boldsymbol{\theta}^h] = \sum_{e=1}^{numel} \delta\hat{\mathbf{v}}^T (\mathbf{K}_T^e \Delta\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{f}}) = 0 \quad (4.60)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^e &= \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{G} + \mathbf{K}_g, \\ \hat{\mathbf{f}} &= \mathbf{G}^T [\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{f}^s - \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{f}^e)] - \mathbf{f}^a. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Aus der Kondensation resultiert ein Schalenelement mit Standard-Schalenfreiheitsgraden. Dies sind sechs Freiheitsgrade (drei Verschiebungen und drei Rotationen) an Knoten, an welchen sogenannte Schalenverschneidungen auftreten. An allen anderen Knoten ohne Verschneidungen besitzt das Element fünf Freiheitsgrade (drei Verschiebungen und zwei Rotationen), siehe [104]. Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T^e besitzt dabei mit sechs Nulleigenwerten den korrekten Rang. Die Lösung der Gleichung liefert das Inkrement des globalen Verschiebungsvektors. Die Rückrechnung der Größen $\Delta\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ und $\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ erfordert die Speicherung bzw. Neuberechnung der zugehörigen Matrizen.

Die numerisch aufwendigen Matrixinversionen in Gleichung (4.59) können umgangen werden. Hierzu wird die Matrix \mathbf{F} aus Gleichung (4.57) umformuliert in

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_1 = - \int_{\Omega_0} \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{N}_\sigma dA \quad (4.62)$$

mit der Matrix $\mathbf{N}_\varepsilon = [\mathbf{N}_\varepsilon^1, \mathbf{N}_\varepsilon^2]$ analog zu Gleichung (4.45). Daher ist \mathbf{F}_1 quadratisch und \mathbf{F} weist die in Gleichung (4.62) dargestellte Struktur auf.

Eine statische Kondensation der unabhängigen Parameter $[\Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}_2, \Delta\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \Delta\hat{\boldsymbol{\lambda}}_3]$ erweist sich an dieser Stelle als deutlich effektiver im Vergleich zur Berechnung der Inversen entsprechend Gleichung (4.59), siehe [35]. Dies liefert

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{H}}_{11} \mathbf{F}_1^{-T}, & \bar{\mathbf{H}}_{11} &= \mathbf{H}_{11} - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{H}_{21}, \\ \hat{\mathbf{f}} &= \mathbf{G}^T [\hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\mathbf{H}} \mathbf{f}^s - \mathbf{F}_1^{-1} \bar{\mathbf{f}}_1^e] - \mathbf{f}^a, & \bar{\mathbf{f}}_1^e &= \mathbf{f}_1^e - \mathbf{H}_{12} \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{f}_2^e. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Durch die Konstanten $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ in Gleichung (4.42)), ist \mathbf{F}_1 schwach besetzt und somit die Berechnung der Inversen \mathbf{F}_1^{-1} mit geringem numerischem Aufwand verbunden. Weiterhin wird die Reihenfolge von $\boldsymbol{\vartheta}^h$ und $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$ in Gleichung (4.44) vertauscht. Dies bewirkt einen *Pivot-Tausch* innerhalb der Matrix \mathbf{H} und ermöglicht

somit die statische Kondensation. Der numerische Aufwand hierfür ist selbst für Lamine mit zahlreichen Schichten gering, da infolge der schichtweisen Ansätze \mathbf{H}_{22} schwach besetzt ist.

In [37] wird die Berechnung von Schubkorrekturfaktoren in der Form normierter Steifigkeitsparameter mit

$$k_1 = \frac{\bar{H}_{11}^{77}}{H_{11}^{77}}, \quad k_2 = \frac{\bar{H}_{11}^{88}}{H_{11}^{88}} \quad \text{und} \quad k_{12} = \frac{\bar{H}_{11}^{78}}{0.5(H_{11}^{77} + H_{11}^{88})} \quad (4.64)$$

vorgeschlagen. Hierbei sind $H_{11}^{\gamma\delta}$ und $\bar{H}_{11}^{\gamma\delta}$ Einträge der Matrizen \mathbf{H}_{11} und $\bar{\mathbf{H}}_{11}$, wobei sich γ und δ auf die Zeilen bzw. Spalten der jeweiligen Matrix beziehen. Da H_{11}^{78} den Wert Null annehmen kann, werden für die Berechnung von k_{12} die gemittelten Einträge der Diagonale verwendet.

Die Ermittlung der Schubkorrekturfaktoren liefert für homogene Lamine den bekannten Wert von $k_1 = k_2 = 5/6$, siehe [7] und [83]. Für isotrope, homogene Lamine sowie für bestimmte Schichtungen folgt $k_{12} = 0$. Dabei bleibt zu erwähnen, dass $k_{12} = \sqrt{k_1 k_2}$, wie in einigen Veröffentlichungen vorgeschlagen, hier nicht gilt.

Die Berechnung der Schubkorrekturfaktoren erfolgt in Abhängigkeit des lokalen Basissystems \mathbf{t}_i . Ist diese von der Hauptrichtung des Laminats verschieden, muss eine Transformation durchgeführt werden, (vgl. Abschnitt 2.5.3).

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Finite-Elemente-Formulierung wurde in eine erweiterte Version des Finite-Elemente-Programms FEAP [47], [48] implementiert.

4.5 Numerische Umsetzung des Schädigungsmodells

Um Delaminationen zu simulieren, wird das in Abschnitt 2.7 vorgestellte isotrope Schädigungsmodell für kleine Verzerrungen angewendet. Die numerische Umsetzung ist im folgenden Abschnitt aufgezeigt.

Im Zuge der Simulation von Versagen mittels der Finite-Elemente-Methode kommt es häufig zu Problemen bezüglich der numerischen Stabilität. Plötzlich auftretende und starke Verminderungen der Steifigkeit wirken sich hierbei besonders negativ auf

die Stabilität aus. Aus diesem Grund werden verschiedene Maßnahmen angewandt, um diese Instabilitäten zu umgehen.

Im Zusammenhang mit dem hier verwendeten Schädigungsmodell soll ein implizites/explicit Integrationsverfahren nach [73] angewendet werden. Das Verfahren wird dabei leicht verändert. Hierfür wird eine zweite Norm bezüglich der Verzerrungen

$$\tau = \tau_E = \sqrt{\mathbf{E}^T \mathbb{C} \mathbf{E}} \quad (4.65)$$

definiert. Damit folgt

$$\tau_\sigma = (1 - d) \tau \quad \text{und} \quad q = (1 - d) \alpha \quad . \quad (4.66)$$

Das Schädigungskriterium lautet somit

$$F_S(\mathbf{S}, q) = \tau_\sigma - q(\alpha) = \underbrace{(1 - d)}_{\neq 0} (\tau - \alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_E(\mathbf{E}, \alpha) = \tau - \alpha = 0, \quad (4.67)$$

wobei $\alpha = \tau$ gilt. Im Vergleich zu dem vorhergehenden Modell wird lediglich die Bestimmung der internen Variablen verändert. Es ergeben sich daraus die folgenden Modifikationen

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \tau_n + \Delta \alpha_n \Delta t_{n+1} \quad \text{mit} \quad \Delta \alpha_n = \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{\Delta t_n}, \\ q_{n+1} &= \alpha_0 e^{H_0 \left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_0} \right)}, \\ d_{n+1} &= 1 - \frac{q_{n+1}}{\alpha_{n+1}}, \\ \mathbf{S}_{n+1} &= (1 - d_{n+1}) \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{S}}_{n+1} = \mathbb{C} \mathbf{E}_{n+1}, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \right|_{n+1} &= \mathbb{C}_T = (1 - d_{n+1}) \mathbb{C} \quad . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die Materialmatrix \mathbf{C}_G in Gleichung (2.102) wird durch die Tangentenmatrix \mathbb{C}_T ersetzt. Dies gilt ebenfalls für die Komponenten von \mathbf{C}_{23} in Gleichung (3.78).

Die Subskripte $(\cdot)_{n+1}$ kennzeichnen den aktuellen Lastschritt, während sich $(\cdot)_n$ auf den vorgehenden Lastschritt bezieht. Da die innere Variable α_{n+1} ausschließlich von Größen der vorherigen Lastschritte abhängt, bleibt sie innerhalb der Newton-Iteration des aktuellen Lastinkrements konstant. Dies stellt aus numerischer Sicht eine große Vereinfachung dar, da die Ableitungen der internen Variablen zu Null

werden. Der Fehler, der durch die Extrapolation von α_{n+1} entsteht, bezieht sich ausschließlich auf den aktuellen Lastschritt und kann somit nicht unbegrenzt anwachsen. Ein Nachteil des impliziten/expliciten Integrationsverfahrens ist die Tatsache, dass die interne Variable der letzten beiden Lastinkremente gespeichert werden muss.

Aus der Formulierung des Schädigungsmodells wird deutlich, dass für die Berechnung die Materialparameter der kritischen Spannung σ_c und die Bruchzähigkeit g_c bekannt sein müssen. Aus numerischer Sicht müssen zusätzlich die Größen der Zwischenschichtdicke h_I und die Steifigkeit μ nach Gleichung (2.134) angegeben werden. Die beiden letzten Parameter sind numerischer Natur. Ihr Einfluss wird im Zuge der Berechnung von Delaminationen in Kapitel 5 eingehend erläutert.

Die numerische Umsetzung des Schädigungsmodells ist in Abb. 4.3 zusammenfassend dargestellt.

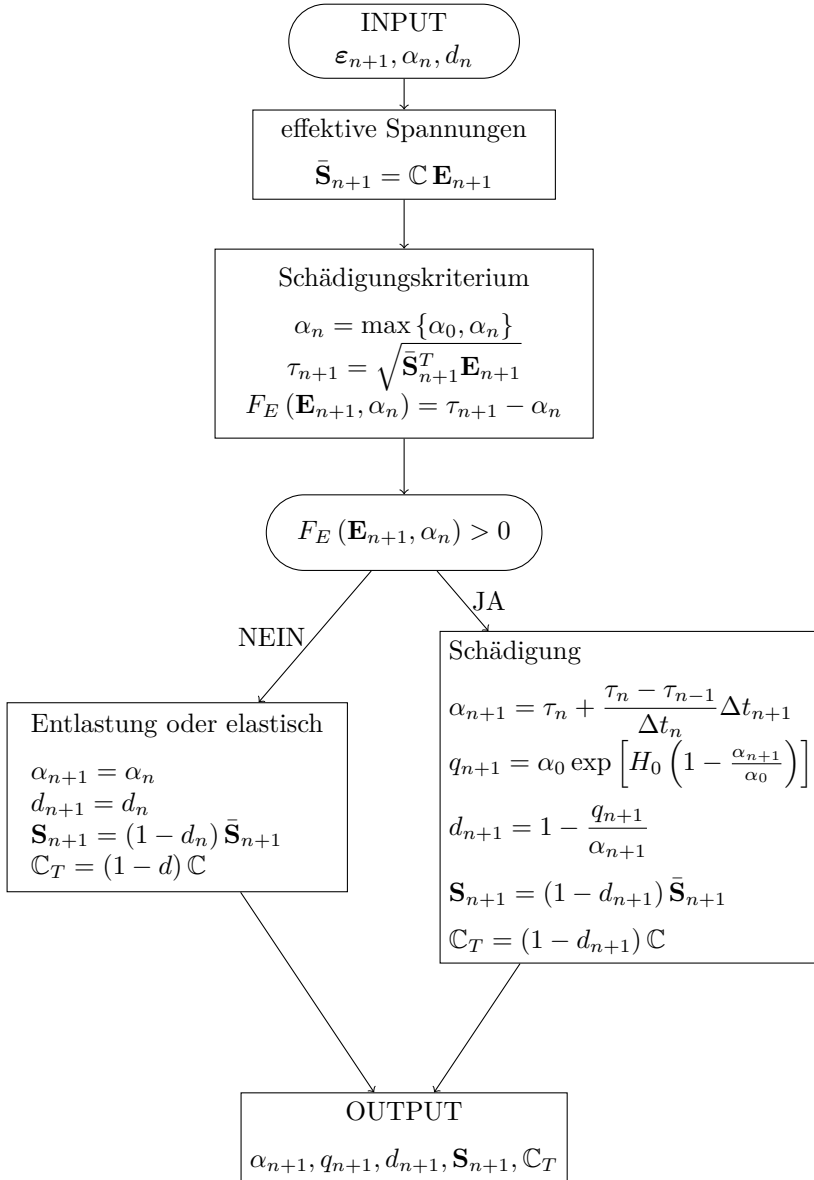


Abbildung 4.3: Numerische Umsetzung des Schädigungsmodells nach OLIVER [73]

Kapitel 5

Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird eine Reihe numerischer Beispiele gezeigt, die die Leistungsfähigkeit der Schalenformulierung verdeutlichen. Dabei wird die Elementformulierung auf verschiedene Belastungszustände, Geometrien und Materialien angewendet. Zu Beginn des Kapitels sind Beispiele aufgeführt, welchen linear-elastisches oder plastisches Materialverhalten zugrunde liegen. Dabei werden zuerst die Ergebnisse eines Patch-Tests gezeigt, bevor die interlaminaren Spannungen mit analytischen Ergebnissen und Resultaten aus Referenzlösungen verglichen werden. Im Anschluss daran werden mehrere Beispiele vorgestellt, bei denen die Delamination der Laminatschichten im Fokus steht.

5.1 Patch-Test

In den frühen Jahren der Finiten-Elemente-Methode waren viele heute bekannte mathematische Zusammenhänge noch unbekannt und wenig erforscht. Recht früh wurden die Anforderungen nach Kontinuität und Vollständigkeit an die Ansatzfunktion gestellt. Der Patch-Test stellte eine einfache und schnelle Möglichkeit dar, die Qualität von Elementformulierungen zu überprüfen. Die Grundidee und das Vorgehen wurden von IRONS erstmals in [10] erwähnt und in [45] ausgeführt.

Für die Durchführung des Tests wird ein sogenannter Patch, also mehrere Elemente, betrachtet. Dieser Patch kann als ein Teil einer größeren Struktur angesehen werden, siehe Abb. 5.1. Der Elementverbund wird anschließend durch eine vorab definierte Verschiebung oder Last beansprucht. Wichtig hierbei ist, dass das Netz

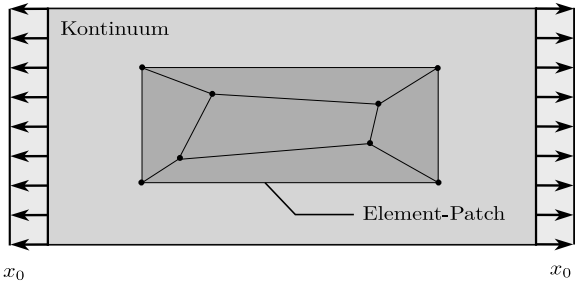


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung eines zweidimensionalen Patch-Tests

unregelmäßig ist. Wenn der Element-Patch die korrekten Resultate liefert, spricht konstante Verzerrungen bei Verschiebungsrandbedingungen oder konstante Spannungen infolge von äußeren Kräften, ist der Test bestanden.

Schon sehr bald wurde erkannt, dass der Patch-Test keine hinreichende Bedingung für Konvergenz ist. Lange wurde er jedoch als notwendige Bedingung betrachtet, was allerdings in den vergangenen Jahren widerlegt wurde. Dennoch eignet sich der Patch-Test für eine erste Abschätzung der Elementformulierung.

Im Folgenden wird die in Kapitel 4 beschriebene Elementformulierung einem Membran- und Biege-Patch-Test unterzogen. Hierfür wird eine aus fünf Elementen bestehende, rechteckige Platte mit der Länge $l_x = 40$, der Breite $l_y = 20$ und der Dicke $h = 0.1$ untersucht. Die Platte ist an drei Ecken gelagert. Die verbleibende Ecke ist frei. Es wird ein elastisches isotropes Materialverhalten angenommen, mit $E = 10^6$ und $\nu = 0.3$. Da die Ergebnisse unabhängig von den verwendeten Einheiten sind, werden diese nicht angegeben.

Tabelle 5.1: Patch-Test: Lastfälle

Lastfall	1	2		
Knoten	F_x	F_z	M_x	M_y
1	-10	-2	20	-10
2	0	0	20	10
3	0	0	-20	10
4	-10	0	-20	10

Zwei unterschiedliche Belastungszustände werden betrachtet. Zum einen eine Be-

lastung in der Ebene und zum anderen eine Biegebeanspruchung. Die einwirkenden Kräfte und Momente der einzelnen Lastfälle können Tabelle 5.1 entnommen werden. Die Geometrie sowie die wirkenden Kräfte und Momente sind in Abb. 5.2 darstellt.

Sowohl der Membran- als auch der Biege-Patch-Test werden durch die vorliegende Elementformulierung erfüllt. Für den ersten Lastfall folgen die konstanten Normalkräfte $n_x = 1$ und $n_y = n_{xy} = 0$. Die Belastung des zweiten Lastfalls führt zu konstanten Biegemomenten $m_x = m_y = m_{xy} = 1$.

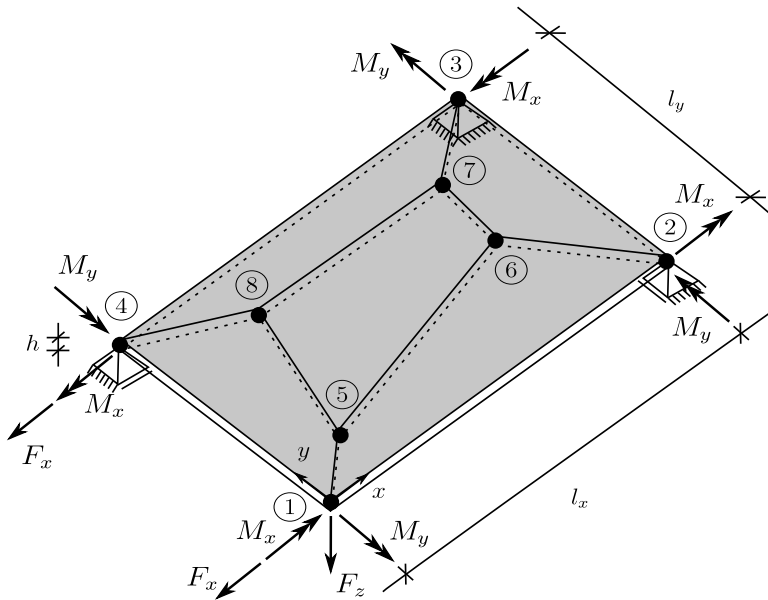
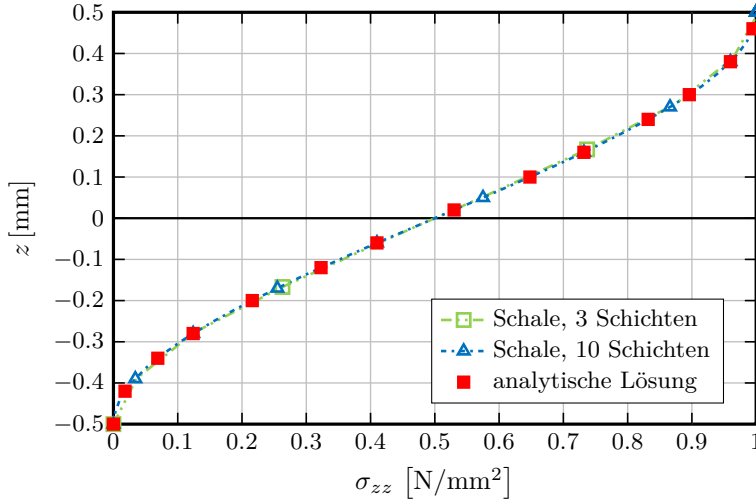


Abbildung 5.2: Patch-Test: Lagerung und Belastung für Lastfall 1 und 2

5.2 Isotrope Platte mit konstanter Flächenlast: Analytische Lösung für Spannungen in Dickenrichtung

Für einfache Geometrien und Belastungen können die Spannungszustände durch analytische Gleichungen beschrieben werden, was am Beispiel einer homogenen Platte in der x - y -Ebene mit isotropem Materialverhalten gezeigt wird. Diese ist all-

Abbildung 5.3: Verlauf der Dickennormalspannung σ_{zz}

seitig gelenkig gelagert ($u_z = 0$ entlang der Plattenränder) und durch die konstante Flächenlast p an der Oberseite der Platte $z = h/2$ belastet. Nach REISSNER [82] folgt für die Spannungsverteilung in Dickenrichtung der Platte

$$\sigma_{zz} = \frac{3p}{4} \left[\frac{2}{3} + \frac{2z}{h} - \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] \quad . \quad (5.1)$$

Durch Gleichung (5.1) ist ersichtlich, dass der Verlauf der Spannungen nicht vom Material oder den Koordinaten in der Ebene abhängt. Das Ergebnis ist ausschließlich von der aufgetragenen Belastung, der Dicke der Platte sowie der Koordinate in Dickenrichtung abhängig.

Für die Berechnung der Dickenspannungen wird eine Flächenlast von $p = 1 \text{ N/mm}^2$ und für die Dicke der Platte $h = 1 \text{ mm}$ gewählt. Das Finite-Elemente-Netz besteht aus 20×20 Elementen.

In Abb. 5.3 werden die Ergebnisse der analytischen Lösung nach Gleichung (5.1) mit der Finite-Elemente-Lösung verglichen. Dabei werden für die z -Richtung drei, bzw. zehn Schichten gewählt. In diesem und allen folgenden Diagrammen wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht jeder Datenpunkt mit einem Symbol markiert. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten der Referenzlösung.

Des Weiteren wird deutlich, dass dies bereits mit einer relativ groben Diskretisierung in Dickenrichtung erreicht wird.

5.3 Laminat unter Gleichlast

Die folgenden Beispiele zeigen die Ergebnisse für interlaminare Spannung von Laminaten mit unterschiedlicher Schichtfolge. Dabei wird eine quadratische, gelenkig gelagerte ($u_z = 0$ für $x = \pm L/2$ und $y = \pm L/2$) Platte der Länge L und der Höhe h , wobei $h^+ = h/2$ und $h^- = -h/2$ gilt, unter konstanter Flächenlast betrachtet. Das Laminat soll aus kohlefaserverstärktem Kunststoff bestehen und besitzt schichtweise transversal-isotrope Materialeigenschaften. Die Elastizitätskonstanten für diesen Fall sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Tabelle 5.2: Materialkonstanten in N/mm²

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12} [-]
125 000	7 400	4 800	2 700	0.34

Die untersuchte Platte ist mit ihren geometrischen Größen in Abb. 5.4 dargestellt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Plattenmittelpunkt. Die x -Richtung entspricht der Faserrichtung und somit einem Faserwinkel von 0° . Für Faserwinkel $>0^\circ$ gilt, dass diese als Rotation um die z -Achse im mathematisch positiven Sinn definiert sind.

Die interlaminaren Spannungen werden in unterschiedlichen Elementen ausgewertet, deren Position im Laminat mit den Koordinaten x_p und y_p eindeutig beschrieben wird. Diese Punkte sind so gewählt, dass sie auf keiner Symmetrieachse liegen. Gleichzeitig sind sie weit genug vom Rand der Platte entfernt, sodass mögliche Effekte der Lagerung keinen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Als Referenzlösung dient die Berechnung mit Hilfe sogenannter Volumenschalenelemente nach [54]. Diese wird in den Diagrammen mit 3D bezeichnet. Aufgrund der Verwendung von Volumenschalenelementen wird das Referenzmodell auch als 3D-Modell bezeichnet.

Für die Diskretisierung des 3D-Modells in Dickenrichtung wird eine unterschiedliche Anzahl an Elementen verwendet, mindestens jedoch fünf pro Laminatschicht. Eine geringere Anzahl führt dazu, dass die Charakteristik der Verläufe nicht ab-

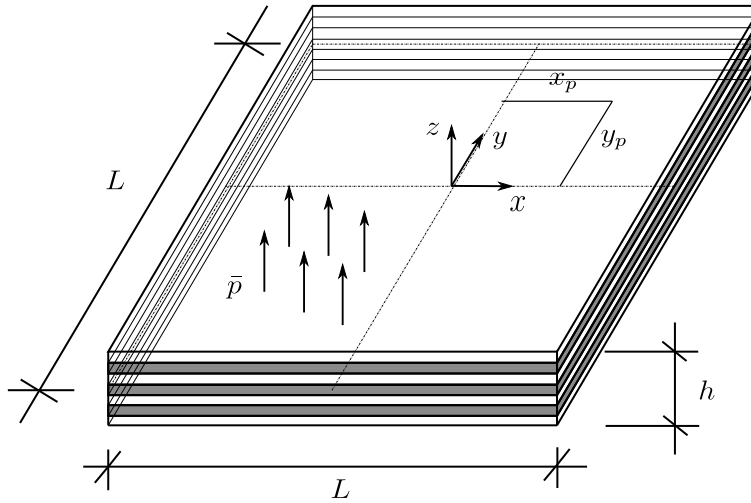


Abbildung 5.4: Durch Gleichlast beanspruchtes, allseitig gelenkig gelagertes Laminat

gebildet werden kann. Bezüglich der Vernetzung im Gebiet wird für die Schale und die Volumenschale die identische Elementanzahl gewählt. Dies geschieht ausschließlich aus praktischen Gründen, da die Spannungsauswertung in Elementmitte durchgeführt wird. Unterschiedliche Vernetzungen hätten unter Umständen andere Koordinaten der Elementmittelpunkte zur Folge. Die Randbedingungen ($u_z = 0$ für $x = \pm L/2$ und $y = \pm L/2$) werden für das 3D-Modell in der Mittelebene $z = 0$ aufgebracht. Die übrigen Freiheitsgrade bleiben frei.

Tabelle 5.3: Koordinaten der Mittelpunkte der ausgewerteten Elemente

Punkt	x_p [mm]	y_p [mm]
①	325	175
②	225	275
③	25	425

5.3.1 Laminat mit $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Schichtung

Im ersten Beispiel wird eine Platte, bestehend aus einem Laminat mit drei Schichten und einer Faserorientierung von $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, betrachtet. Die Platte besitzt die Abmessungen $L = 1000$ mm und die Höhe $h = 20$ mm. Sie wird an der Oberfläche durch die konstante Flächenlast $\bar{p} = 1$ N/mm² belastet.

Für die Berechnung der interlaminaren Spannungen wird für das Schalenmodell ein Netz mit 60×60 Elemente gewählt. Das 3D-Modell wird zusätzlich mit 10 Elementen je Schicht diskretisiert. Die resultierenden Netze sind in Abb. 5.5 zu sehen. Für die Bestimmung der Deformationen infolge der Beanspruchung durch die Flächenlast \bar{p} sind ein bis zwei Elemente je Schicht im 3D-Modell ausreichend. Die

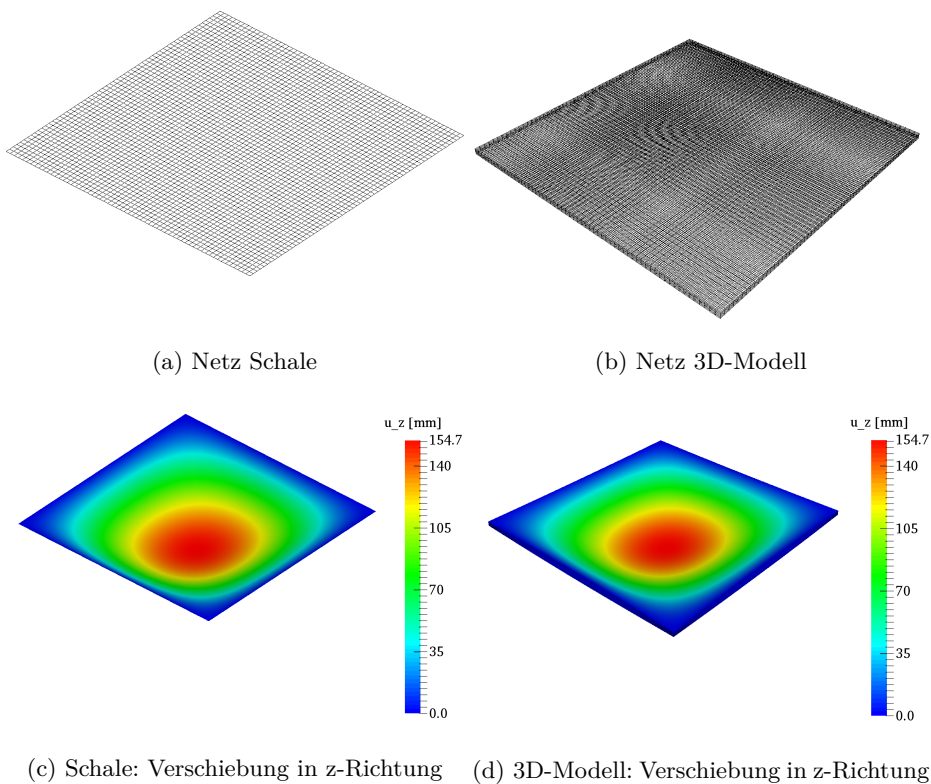


Abbildung 5.5: Vergleich der Netze und Ergebnisse für die Absenkung der Platte infolge der Flächenlast

Berechnung der interlaminaren Spannungen erfordert jedoch, wie bereits beschrieben, eine feinere Diskretisierung in Dickenrichtung (≈ 5 Elemente je Schicht). An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass mit dem Schalenmodell auch gröbere Netze verwendet werden können. Als erste Vergleichsgröße wird die maximale Absenkung der Platte u_z bestimmt. Für beide Modelle ergibt sich ein Wert von $\max u_z = 154.7 \text{ mm}$. Die Deformationsfiguren sind ebenfalls in Abb. 5.5 zu sehen.

Im nächsten Schritt wird eine Auswertung der interlaminaren Spannungen durchgeführt. Hierzu werden verschiedene Elemente des Laminats ausgewählt, deren Mittelpunkt durch die Koordinaten x_p und y_p definiert sind, die in Abb. 5.6 grafisch dargestellt und in Tabelle 5.3 zusammengefasst sind.

In Abb. 5.6 sind die Verläufe der Spannungen, bzw. Verwölbung über die Dicke der Platte von $-h/2$ bis $h/2$ dargestellt. Das erste Diagramm zeigt die Querschubspannungen τ_{xz} an Punkt ①. Außerdem sind die Normalspannungen in Dickenrichtung σ_{zz} an Punkt ② sowie die Querschubspannungen τ_{yz} und die Verwölbung x -Richtung \tilde{u}_x an Punkt ③ gezeigt. Der Vergleich mit den Ergebnissen des 3D-Modells liefert eine sehr gute Übereinstimmung. Die Verwölbung wird im 3D-Modell mit

$$\tilde{u}_x(3D) = u_x(3D) - z \times \beta_y - u_{x0}(\text{Schale}) - u_{x0}(3D) \quad (5.2)$$

bestimmt. Dabei sind $u_{x0}(\text{Schale})$ und $u_{x0}(3D)$ die Verschiebungen in x -Richtung in der Mittelebene, also für $z = 0$.

Abbildung 5.7 zeigt am Viertelmodell der Platte die Ergebnisse für die Querschubspannungen τ_{xz} in der Mittelebene $z = 0$. Dabei wird einmal ein regelmäßiges Netz Abb. 5.7a und ein unregelmäßiges Netz Abb. 5.7b verwendet, um den Einfluss der Elementgeometrie auf die Ergebnisse zu untersuchen. Beide Netze bestehen aus einer annähernd gleichen Anzahl von Elementen. Das regelmäßige Netz besitzt $40 \times 40 = 1600$ Elemente und das unregelmäßige 1594 Elemente. Für sehr grobe Netze ist eine schlechtere Übereinstimmung zu erwarten. Die Resultate der Berechnungen zeigen, dass die Elementformulierung für die verwendeten Netze nahezu unempfindlich gegenüber unregelmäßigen Netzgeometrien ist.

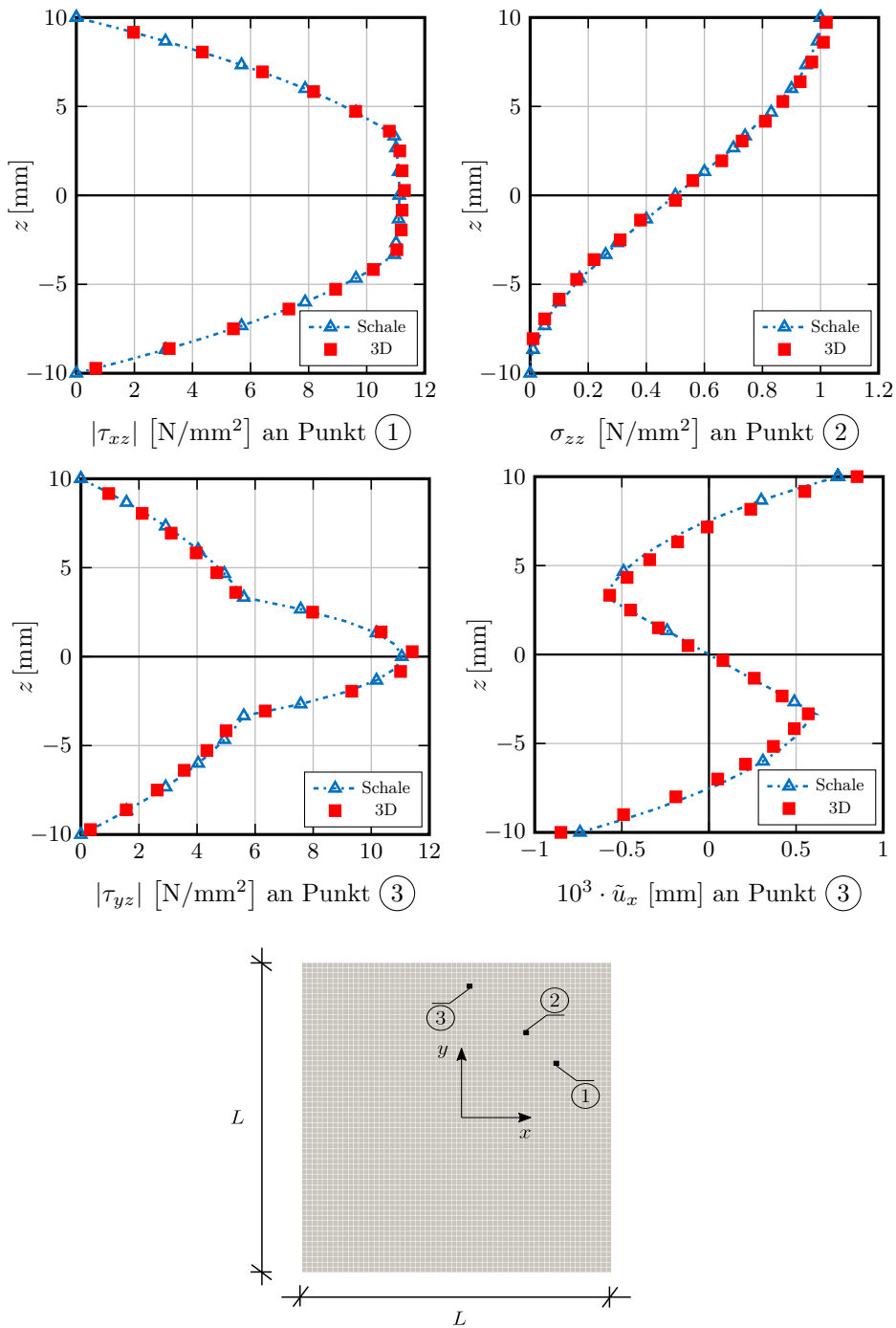


Abbildung 5.6: Verläufe der interlaminaren Spannungen und Verwölbungen für [0°/90°/0°]-Laminat (oben und Mitte) sowie die Positionen der ausgewerteten Elemente (unten)

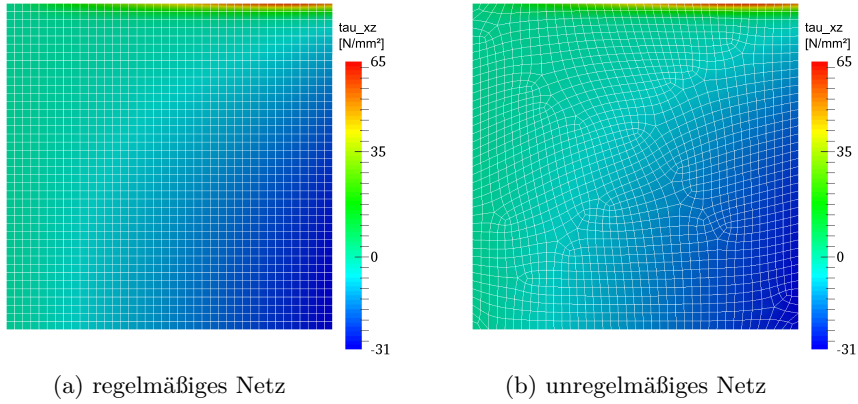


Abbildung 5.7: Vergleich der Querschubspannung $\tau_{xz}(x, y, z = 0)$ in der Mittelebene für regelmäßige und unregelmäßige Vernetzung am Viertelmodell

5.3.2 Unsymmetrisches Laminat mit $[0^\circ/90^\circ]$ -Schichtung

In der praktischen Anwendung kommen häufig symmetrische Laminare vor, wie sie im vorherigen Beispiel beschrieben wurden. Diese stellen vom Standpunkt der numerischen Berechnung jedoch einen Sonderfall dar. Daher wird in einem weiteren Beispiel ein unsymmetrisches Laminat untersucht. Es besteht aus zwei Schichten, die eine 0° bzw. 90° Ausrichtung aufweisen. Geometrie und Materialdaten bleiben hierbei unverändert.

Für das Schalenmodell wird ein Netz mit 60×60 Elementen gewählt. Eine Ausnutzung der Symmetrie ist im Falle von unsymmetrischen Schichtungen nicht möglich. Das 3D-Modell ist mit zehn Elementen je Schicht diskretisiert, was zu einem Netz mit $60 \times 60 \times 20$ Elementen führt.

Die Ergebnisse für die Berechnung des unsymmetrischen Laminats sind in Abb. 5.8 zusammengefasst. Die interlaminaren Schubspannungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten des 3D-Modells. Bei den Normalspannungen in Dickenrichtung σ_{zz} sind im Bereich der Mittelebene $z = 0$ leichte Abweichungen zu erkennen, die auf die Lagerung des 3D-Modells zurückzuführen sind.

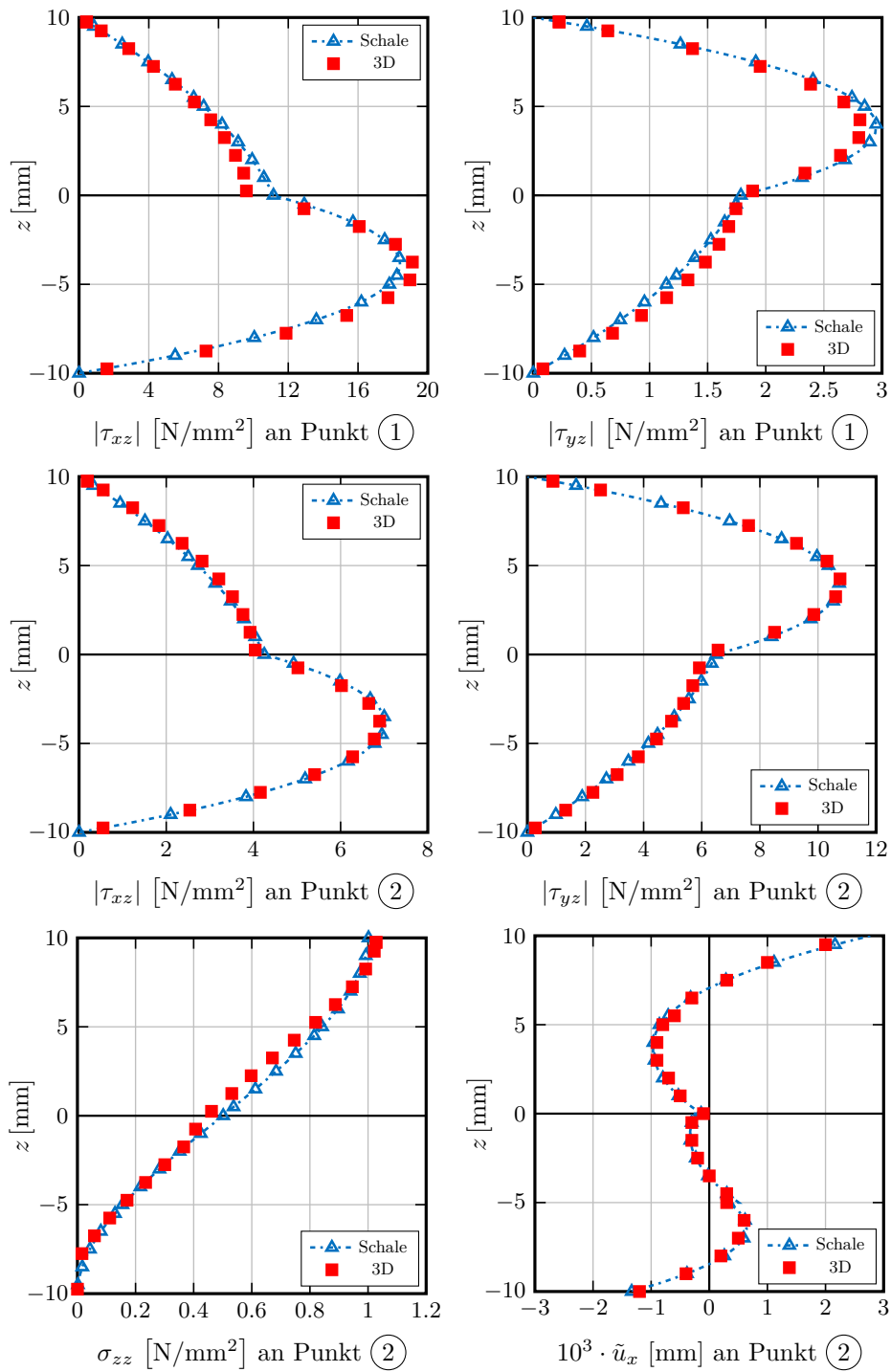


Abbildung 5.8: Verläufe der interlaminaren Spannungen sowie die Verwölbungen für $[0^\circ/90^\circ]$ -Laminat

5.3.3 Winkelverbund mit $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ -Schichtung

Winkelverbunde sind Lamine, bei denen die Schichten abwechselnd um einen positiven und negativen Winkel zur Hauptachse angeordnet werden. Diese Art der Verbunde findet häufig Einsatz in der industriellen Fertigung. Dabei können unterschiedliche Laminatdicken und Winkelerorientierungen realisiert werden. Für symmetrische Schichtungen entfallen Biege-Drill- und Biege-Dehn-Kopplungen. Diese Kopplungen treten bei unsymmetrischen Laminaten in der Regel auf und bedeuten, dass die Krümmungen der Laminebene die Drillmomente mit beeinflussen und die Verdrillkrümmung einen Beitrag zu den Biegemomenten liefert.

Tabelle 5.4: Rechenzeiten - jeweils normiert auf Ergebnisse des Schalenelements

Netz	Schale	3D ($n = 3$)	3D ($n = 5$)
10×10	1	4	7
20×20	1	6	11
30×30	1	9	18
40×50	1	12	30
60×60	1	16	37
70×70	1	18	46
80×80	1	23	75

Hier wird ein Winkelverbund aus acht Schichten mit der Folge $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ untersucht. Der Index $[\cdot]_s$ bedeutet, dass eine Symmetrie in der Schichtung vorliegt. Geometrie und Materialdaten bleiben unverändert. Das Netz besteht aus 60×60 Elementen. Für die Vernetzung in Dickenrichtung des Laminats wird für das 3D-Modell das Minimum von fünf Elementen je Schicht gewählt. Dies führt zu einer Elementanzahl von $n_{el} = 144\,000$ für das 3D-Modell. Um einen Anhaltspunkt für die Berechnungsdauer zu liefern, ist in Tabelle 5.4 ein Vergleich der Rechenzeiten gegeben. Dazu wird festgestellt, dass die benötigte Rechenzeit von vielen Faktoren abhängt. Dennoch liefert der Vergleich einen Anhaltspunkt, in welcher Größenordnung sich die Unterschiede der Rechenzeiten bewegen. Für den Vergleich wird der achtagige Winkelverbund mit verschiedenen feinen Netzen auf einem Windows Desktop-PC (2x Intel Xeon E5-2620v2, 6 Kerne, 2.1 GHz) berechnet. Als Gleichungslöser kommt der Solver PARDISO [104] zum Einsatz. In Tabelle 5.4 gibt n die Anzahl der Elemente für die Diskretisierung in Dickenrichtung des 3D-Modells

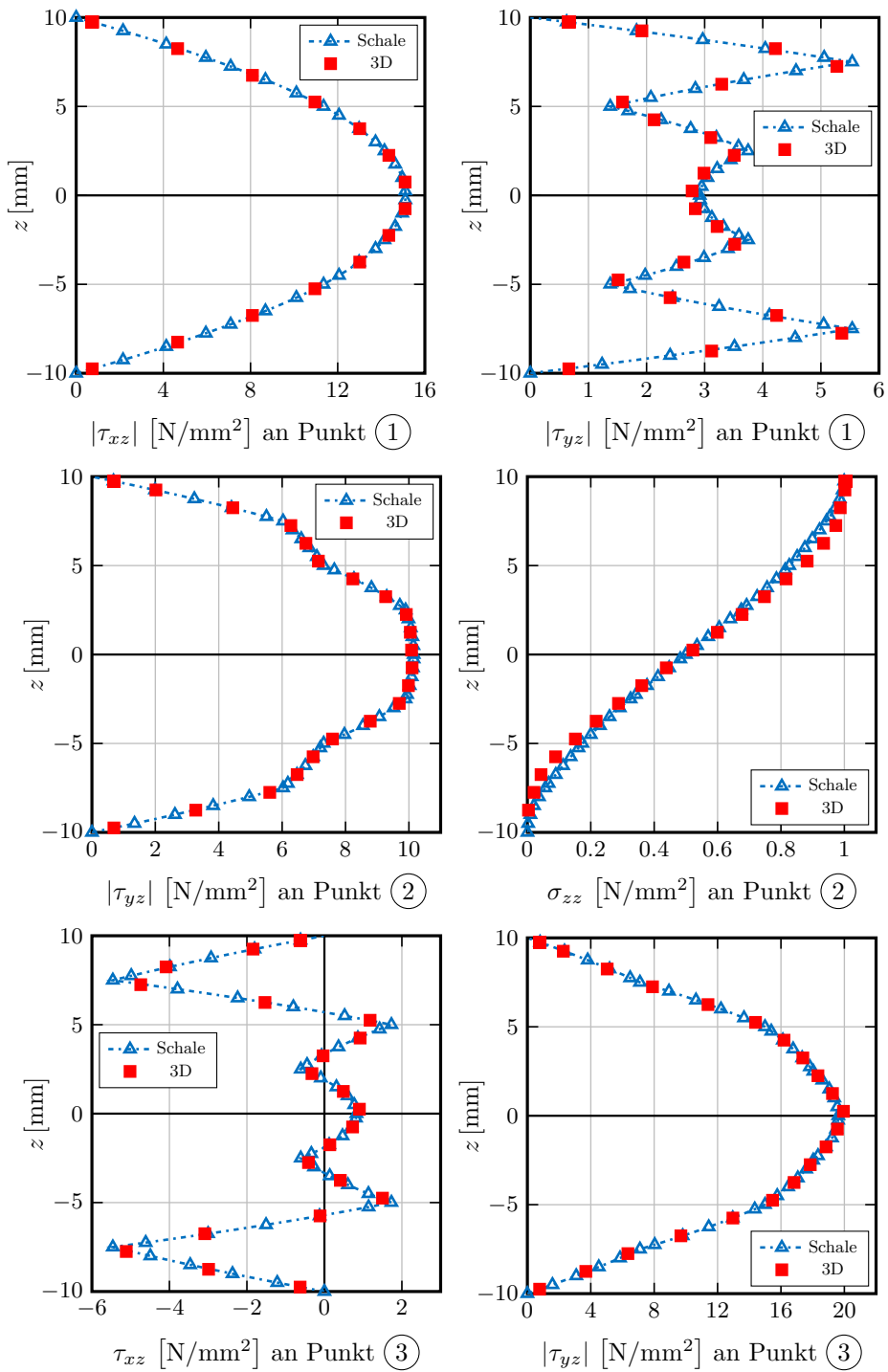


Abbildung 5.9: Verläufe der interlaminaren Spannungen für $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ -Winkelverbund

an. Die Ergebnisse sind auf die Rechenzeit des Schalenelements normiert. Es zeigt sich besonders bei feinen Netzen und gleichzeitiger feiner Diskretisierung in Dickenrichtung, dass die Schalenformulierung einen sehr großen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber dem 3D-Modell besitzt.

In Abb. 5.9 sind die interlaminaren Spannungen und Verwölbungen für den acht-schichtigen Winkelverbund aufgezeigt. Sie stimmen sehr gut mit den Ergebnissen der Referenzlösung überein.

5.3.4 Winkelverbund mit 20 Schichten

Im letzten Beispiel dieses Abschnitts wird ein Winkelverbund, bestehend aus insgesamt 20 Schichten mit der Reihenfolge $[45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 45^\circ / -45^\circ / 0^\circ]_s$, untersucht. Die Netze bestehen aus 60×60 Elementen für das Schalenmodell und $60 \times 60 \times 100$ Elementen für das 3D-Modell.

Abbildung 5.10 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen der Querschubspannungen, der Spannungen in Dickenrichtung sowie der Verwölbung in y -Richtung an den angegebenen Punkten. Erneut ist eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung zu erkennen. Allgemein lässt sich feststellen, dass die Ergebnislänge mit zunehmender Schichtzahl steigt. Für das Modell mit den Volumenschalenelementen werden lediglich fünf Elemente je Schicht zur Diskretisierung der Dickenrichtung des Laminats genutzt. Ein feineres Netz ist aus hardwarespezifischen Gründen nicht realisierbar. Die leichten Abweichungen der Dickennormalspannungen σ_{zz} an Punkt ② können auf diese recht grobe Diskretisierung zurückgeführt werden.

5.3.5 Zusammenfassung: Laminat-Beispiele

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Schalenelement den dreidimensionalen Spannungszustand in Laminaten exakt darstellen kann. Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Referenzberechnungen ist sehr hoch bei gleichzeitiger Rechenzeiterparnis. Darüber hinaus sind die berechneten interlaminaren Spannungen für linear-elastische Probleme automatisch kontinuierlich an den Schichtgrenzen. Ebenso werden die Spannungsrandbedingungen an den Oberflächen exakt erfüllt. Die über die Laminatdicke integrierten Spannungen stimmen außerdem mit den über das Stoffgesetz berechneten Schnittgrößen der Querkräfte q^1 und q^2 überein.

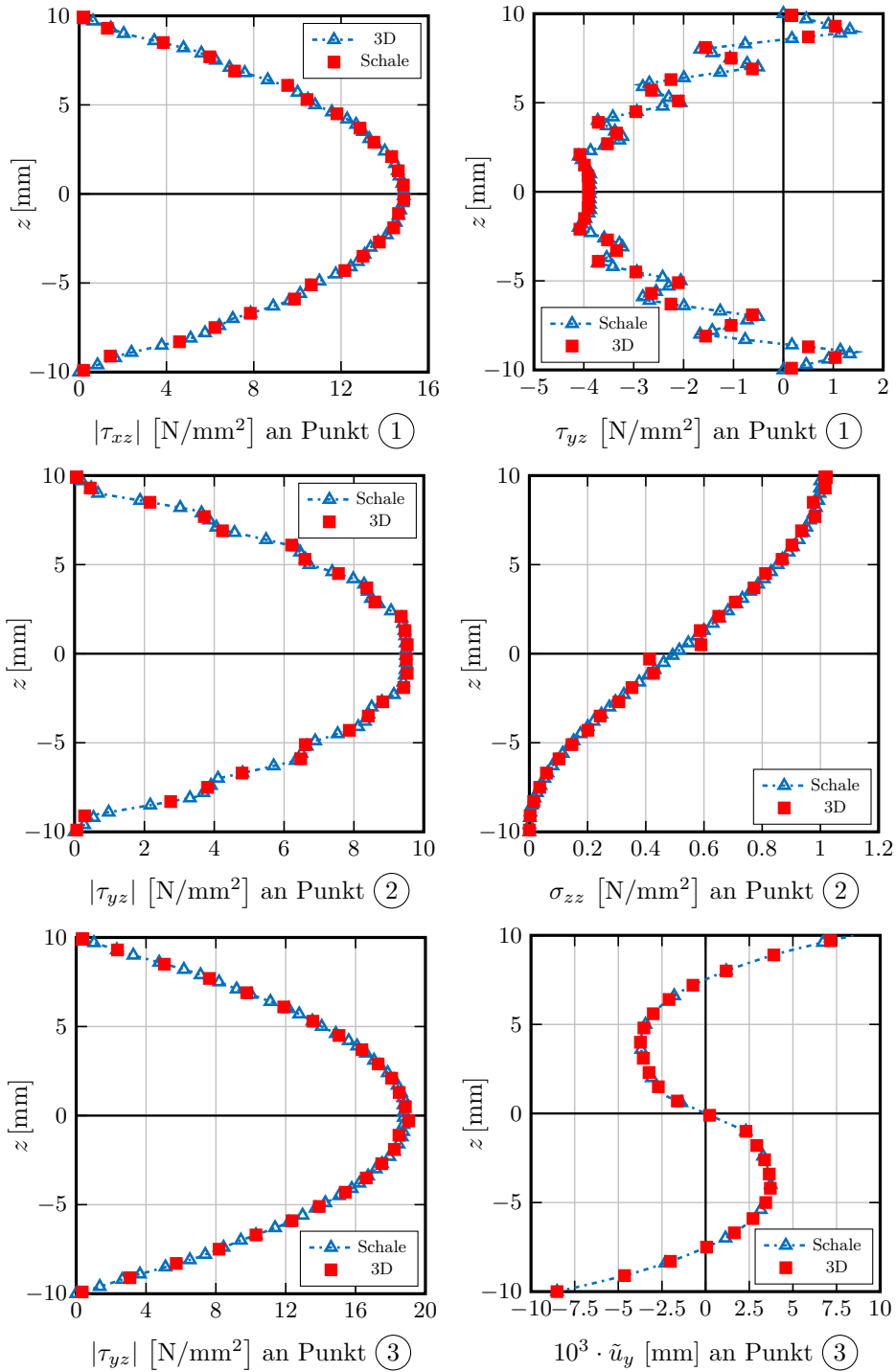


Abbildung 5.10: Verläufe der interlaminaren Spannungen für Winkelverbund bestehend aus 20 Schichten

5.4 Eingespannter Zylinderabschnitt

In diesem Beispiel wird ein eingespannter Zylinderabschnitt betrachtet, der an seinem freien Ende durch eine Streckenlast \bar{t} belastet wird. Die Geometrie ist in Abb. 5.11 dargestellt. Die Zylinderschale hat den Radius $R = 1\,000\text{ mm}$, der bis zur Mittelebene reicht. Die konstante Streckenlast wird zu $\bar{t} = 100\text{ N/mm}$ gewählt. Die Dicke der Zylinderschale beträgt $h = 100\text{ mm}$ und die Tiefe $c = 1\,000\text{ mm}$.

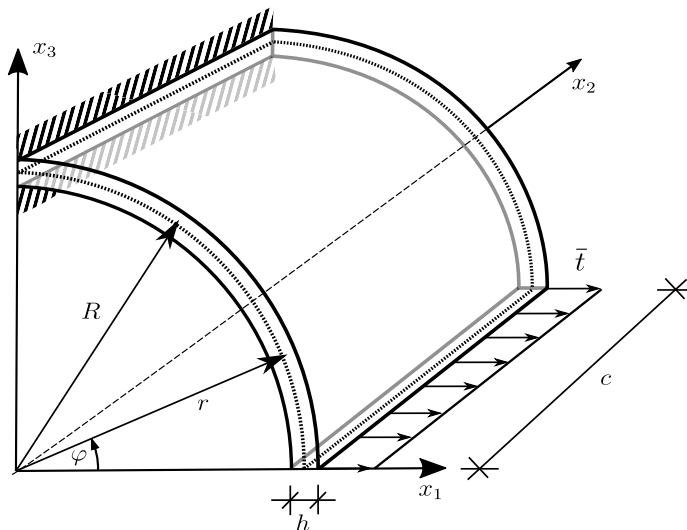


Abbildung 5.11: Eingespannter Zylinderabschnitt nach [99]

Für homogenes, isotropes linear-elastisches Materialverhalten existiert für diesen speziellen Belastungsfall eine analytische Lösung für die Spannungen in radialer und tangentialer Richtung. Diese analytische Lösung beschreibt TIMOSHENKO in [99]. Dabei sind die Spannungen unabhängig von den Elastizitätskonstanten und berechnen sich ausschließlich aus den geometrischen Größen sowie der Belastung.

Unter Verwendung von Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$ lauten die Spannungen

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \varphi \\
\sigma_\varphi &= \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \varphi \\
\tau_{r\varphi} &= - \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \varphi
\end{aligned} \tag{5.3}$$

mit $a \leq r \leq b$ und $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ sowie den Größen

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{\bar{t}}{2N} & B &= \frac{\bar{t}a^2b^2}{2N} \\
D &= -\frac{\bar{t}}{N}(a^2 + b^2) & N &= a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a} \\
a &= R - \frac{h}{2} & b &= R + \frac{h}{2}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Die Finite-Elemente-Berechnung wird mit fünf homogenen Schichten gleicher Dicke durchgeführt. Für den Mittelpunkt des Zylinderabschnitts werden die tangentialen Spannungen σ_φ , die radialen Spannungen σ_r und die Schubspannungen $\tau_{r\varphi}$ bestimmt. Sie werden über die Dicke des Zylinderabschnitts mit der Koordinate $z = r - R$ in Abb. 5.12 dargestellt. Die Auswertung der Spannungen wird für die Stelle $\varphi = \pi/4$ durchgeführt.

Die Ergebnisse des Schalenelements zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Referenzlösung, sowohl für die Spannungen in der Ebene als auch in Dickenrichtung.

In Gleichung (3.34) wurde gezeigt, dass die Verzerrungen in der Ebene $\{E_{11}, E_{22}, 2E_{12}\}$ lineare Funktionen der Koordinate in Dickenrichtung sind. Die Ergebnisse lassen den Schluss zu, dass dies eine passende Annahme darstellt.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Berechnung von σ_r nur durch Berücksichtigung des Krümmungsterms \bar{w} aus Gleichung (3.69) möglich ist. Da der Term jeweils aus dem vorhergehenden Lastinkrement verwendet wird, muss die Berechnung in zwei Schritten durchgeführt werden. Hierbei kann bereits im ersten Lastschritt die gesamte Last aufgebracht werden. Im zweiten Lastschritt wird ohne weitere Lastaufbringung die Spannung σ_r berechnet. Dieses Beispiel zeigt, dass das Schalenelement auch für gekrümmte Strukturen korrekte Werte für die Spannungen liefert.

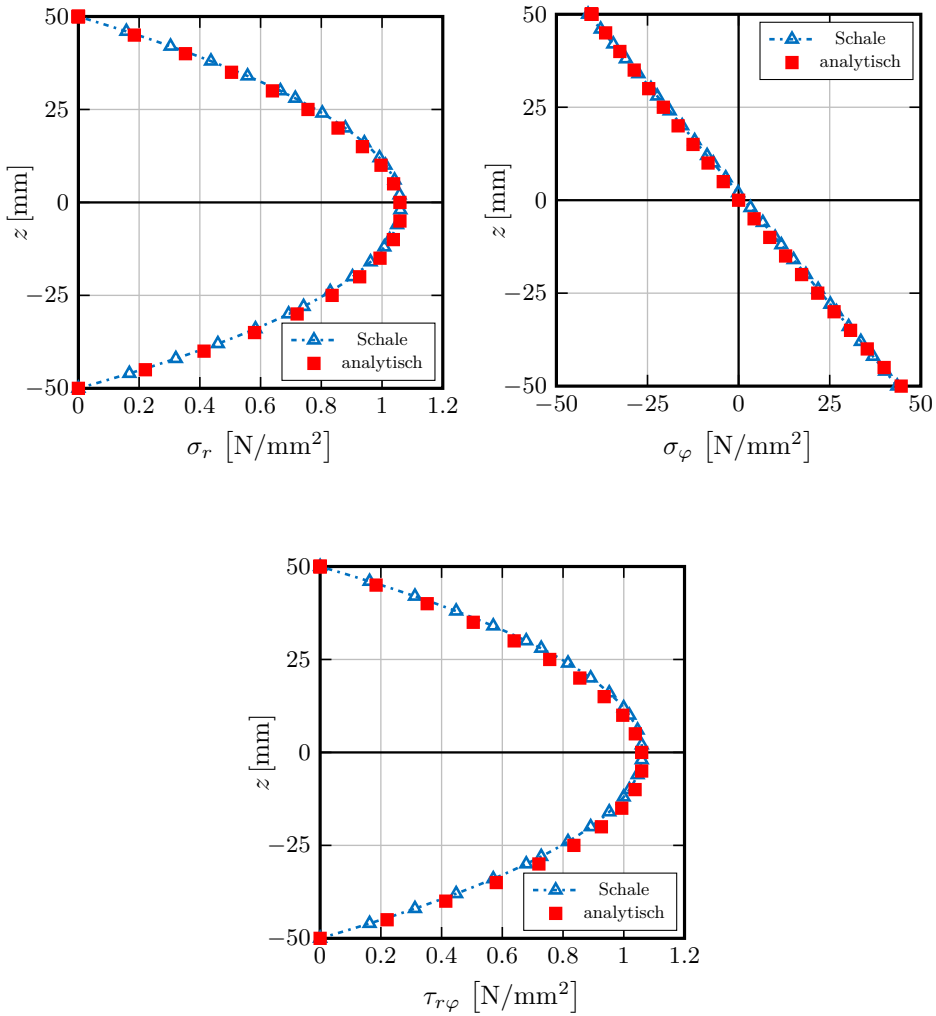


Abbildung 5.12: Verläufe der Spannungen der eingespannten Zylinderschale für $\varphi = \pi/4$

5.5 Sandwichprofile

Sandwichprofile sind Verbundbauteile, die aus einem Kern bestehen, an dessen Ober- und Unterseite Deckbleche anschließen. Diese sind in der Regel durch eine, im Vergleich mit dem Kern, geringe Dicke gekennzeichnet. Meist besteht das Kernmaterial von Sandwichbauteilen aus Schäumen und die Deckbleche aus Metallen. Es sind jedoch auch Kombinationen aus anderen Materialien oder auch Geome-

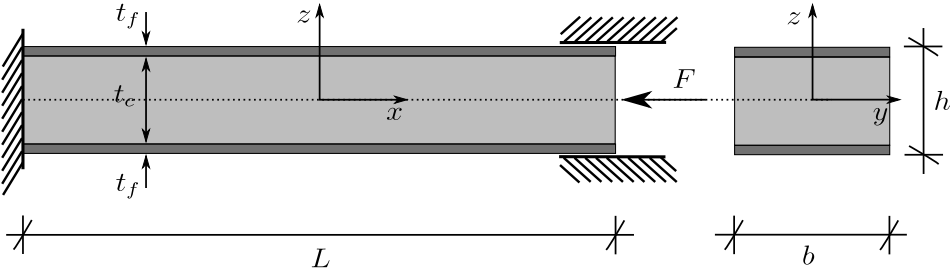


Abbildung 5.13: Axial belasteter Sandwich-Plattenstreifen

trien des Kerns möglich. Eingesetzt werden Sandwichprofile, beispielsweise in der Luftfahrt oder auch im Bauwesen.

5.5.1 Stabilitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird ein Sandwichprofil auf Stabilität untersucht. Hierzu wird ein Sandwich-Plattenstreifen, wie er in Abb. 5.13 dargestellt ist, betrachtet. Er ist in der Ebene durch die Koordinaten $-L/2 \leq x \leq L/2$ und $-b/2 \leq y \leq b/2$ beschrieben. Zudem besteht der Plattenstreifen aus einem Kern der Dicke t_c und zwei Deckblechen mit der Stärke t_f . Der Plattenstreifen ist an beiden Enden $x = \pm L/2$ eingespannt und durch eine Einzellast F axial belastet. Die Belastung wird dabei in Form einer Verschiebung in negative Richtung auf alle Knoten mit den Koordinaten $(x = L/2, y, z)$ aufgebracht. Sowohl für das Kernmaterial E_c, ν_c als auch für die Deckschichten E_f, ν_f wird isotropes, linear-elastisches Materialverhalten angenommen. Der E-Modul des Kerns wird variiert und der Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Sandwich-Plattenstreifens analysiert. Die Materialdaten und die Abmessungen sind in Tabelle 5.5 dargestellt.

Tabelle 5.5: Geometrie und Materialdaten des Sandwich-Plattenstreifens

Geometrie				Material			
L	=	500	mm	E_f	=	70 000	N/mm ²
t_c	=	30	mm	ν_f	=	0.3	
t_f	=	0.5	mm	E_c	=	wird variiert	
b	=	60	mm	ν_c	=	0.3	

Das Schalenmodell wurde mit 50 Elementen in x -Richtung und einem Element in der Tiefe diskretisiert. Für das Volumenmodell wurde die Dickenrichtung zusätzlich mit zehn Elementen für den Kern und je einem Element für die Deckschichten vernetzt. Da im Rahmen der Stabilitätsanalyse unsymmetrische Beulmoden auftreten, werden für die Berechnung keine Symmetrien ausgenutzt.

Als Referenzwerte werden die *Eulersche Knicklast*

$$F^{Euler} = \frac{4\pi^2 E_f I_0}{L^2} = 1\,646.542 \text{ kN}, \quad (5.5)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment $I_0 = \frac{bh^3}{12}$ und

$$F^{Schub} = \frac{E_c b t_c}{2(1 + \nu_c)} \quad (5.6)$$

bestimmt. Die Kraft F^{Schub} lässt sich aus dem Schubversagensmodus des Kerns herleiten und ist eine gute Näherung der Knicklast des Sandwichprofils, wenn die Steifigkeit des Kernmaterials deutlich geringer ist als die der Deckbleche [78].

Das Sandwich wird im Rahmen einer linearen Stabilitätsanalyse untersucht. Hierfür wird das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_L + \Lambda \mathbf{K}_{NL}) \Phi = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

gelöst. Dabei werden die Matrizen $\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_T(\mathbf{V} = \mathbf{0})$ und $\mathbf{K}_{NL} = \mathbf{K}_T - \mathbf{K}_L$ mit Hilfe der globalen tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T als Funktion der globalen Verschiebungen \mathbf{V} bestimmt. Der kleinste Eigenwert Λ von Gleichung (5.7) entspricht der kritischen Last F^{krit} .

Die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse sind in Abb. 5.14 aufgezeigt. Die Steifigkeit des Kernmaterials wird variiert. Dabei werden Werte beginnend mit $E_c = 10^{-5} \cdot E_f$ bis $E_c = E_f$ gewählt und jeweils die kritische Last bestimmt. Diese sind mit F^{krit}/F^{Euler} normiert und zusammen mit dem Verhältnis der Steifigkeiten in doppellogarithmischem Maßstab aufgezeichnet. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Berechnung mit Volumenschalenelementen. Auch wird von beiden Modellen für eine abnehmende Steifigkeit des Kerns die Last F^{Schub} erreicht.

In Abb. 5.15 sind die Eigenvektoren für ausgewählte Steifigkeiten des Kernmaterials

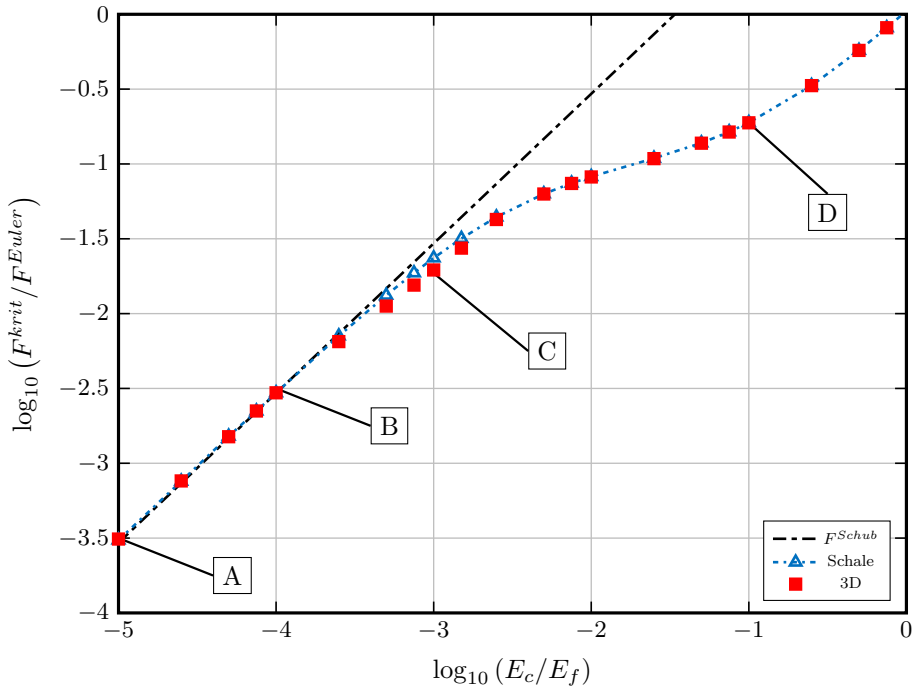


Abbildung 5.14: Knicklasten des Sandwich-Plattenstreifens

abgebildet. Diese wird mit Volumenschalenelementen bestimmt. Abbildung 5.15a zeigt das Ergebnis für ein Steifigkeitsverhältnis von $E_c/E_f = 10^{-5}$. Für diesen Fall ist ein Schubversagen des Kernmaterials zu beobachten. Ein Steigern des E-Moduls $10^{-4} \leq E_c/E_f \leq 10^{-2}$ des Kerns führt zu antisymmetrischen Deckschichtknittern, siehe Abb. 5.15b und 5.15c. Bei annähernd gleichen Steifigkeiten von Kern und Deckblechen $10^{-2} \leq E_c/E_f \leq 1$ tritt Eulerknicken auf, was in Abb. 5.15d gezeigt ist.

5.5.2 Elasto-plastische Berechnung

In diesem Beispiel wird das Sandwichprofil aus dem vorhergehenden Abschnitt in der Länge, der Belastung und der Lagerung modifiziert. Das Profil ist an beiden Enden $x = \pm L/2$ gelenkig gelagert und durch die Flächenlast $p = \lambda \cdot 10^{-3} \text{N/mm}^2$ beansprucht, die jeweils zur Hälfte auf Unter- und Oberseite wirkt. Da es sich um einen Plattenstreifen handelt, wird in y -Richtung ein ebener Verzerrungszustand

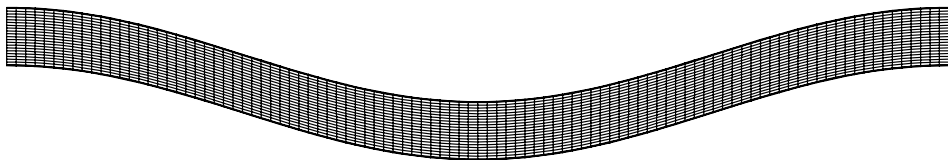
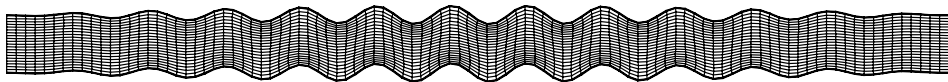
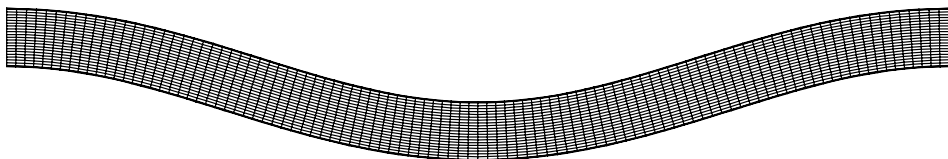
(a) Eigenvektor für $E_c/E_f = 10^{-5}$ an Punkt A(b) Eigenvektor für $E_c/E_f = 2.5 \cdot 10^{-4}$ an Punkt B(c) Eigenvektor für $E_c/E_f = 10^{-3}$ an Punkt C(d) Eigenvektor für $E_c/E_f = 10^{-1}$ an Punkt D

Abbildung 5.15: Eigenvektoren des Sandwich-Plattenstreifens für ausgewählte Steifigkeiten

durch entsprechende Randbedingungen erzeugt. In Abb. 5.16 ist der Sandwich-Plattenstreifen mit den geometrischen Größen abgebildet.

Das Kernmaterial wird als linear-elastisch und isotrop angenommen und besitzt somit die Elastizitätskonstanten E_c und ν_c . Für die Deckbleche wird elasto-plastisches Materialverhalten mit isotroper Verfestigung angenommen. Das Material besitzt hierbei die Fließspannung $Y_0 = 100 \text{ N/mm}^2$ und den Verfestigungsmodul $\xi = 1000 \text{ N/mm}^2$. Das verwendete Materialmodell basiert auf der J_2 -Plastizität und berücksichtigt lineare isotrope Verfestigung. Die Materialdaten sowie die Geometrie können Tabelle 5.6 entnommen werden.

Aufgrund der Symmetrie wird für die Berechnung der Lastverschiebungskurve ein Netz mit einem Element in y -Richtung und 150 Elementen in x -Richtung gewählt. Das 3D-Modell wird, analog zum vorherigen Beispiel, mit 12 Elementen in Dicken-

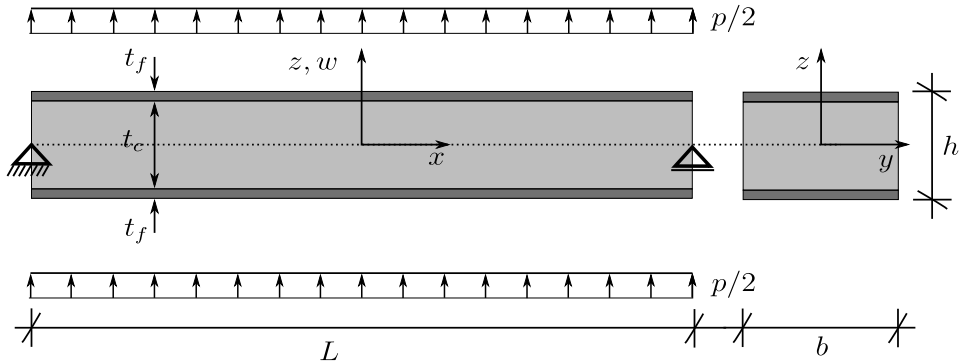


Abbildung 5.16: Durch Flächenlast beanspruchter Sandwich-Plattenstreifen

Tabelle 5.6: Geometrie und Materialdaten des Sandwich-Plattenstreifens

Geometrie				Material		
L	=	2 000	mm	E_c	=	70 N/mm ²
t_c	=	30	mm	ν_c	=	0.3
t_f	=	0.5	mm	E_f	=	70 000 N/mm ²
b	=	60	mm	ν_f	=	0.3
			mm	Y_0	=	100 N/mm ²
				ξ	=	1 000 N/mm ²

richtung vernetzt. Hierbei werden zehn Elemente für den Kern und je eines für die beiden Deckschichten verwendet. Das Schalenmodell ist mit zwei Schichten für den Kern und je einer Schicht für die Deckbleche diskretisiert.

Die geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung wird lastgesteuert durchgeführt. Dabei wird die Verschiebung w in Profilmittte $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ausgewertet. Hierbei wird der Lastfaktor bis zu einem Wert von $\lambda = 5$ gesteigert, bevor im Anschluss eine vollständige Entlastung des Sandwichprofils erfolgt. Die Lastverschiebungskurve des Sandwich-Plattenstreifens ist in Abb. 5.17 dargestellt. Der Verlauf beschreibt das linear-elastische Anfangsverhalten, den Übergang in plastisches Materialverhalten und die verbleibende Deformation nach Entlastung. Die Ergebnisse des Schalenelements zeigen eine perfekte Übereinstimmung mit denen der Referenzlösung.

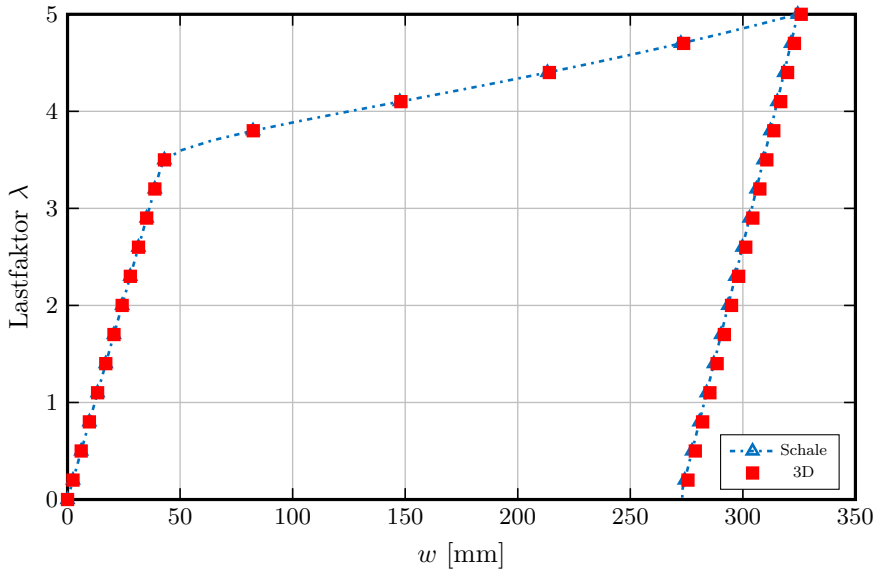


Abbildung 5.17: Lastverschiebungskurve des Sandwich-Plattenstreifens

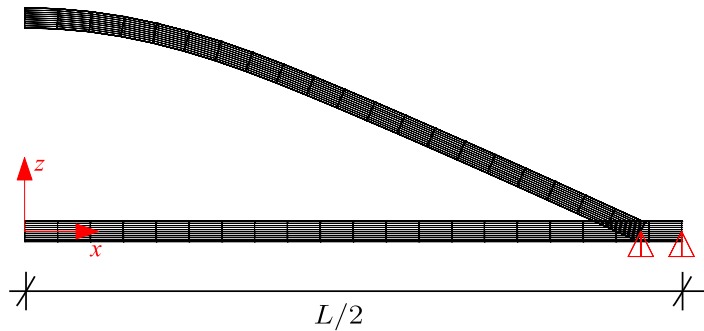


Abbildung 5.18: Sandwich-Plattenstreifen beansprucht durch Flächenlast

Auch bei Sandwichprofilen sind Spannungen in Dickenrichtung von Bedeutung. Im Folgenden werden für verschiedene Lastfaktoren die im Sandwichprofil auftretenden Querschubspannungen τ_{xz} und Normalspannungen in Dickenrichtung σ_{zz} bestimmt. Dabei wird ein stationärer Punkt mit der Koordinate $x = 750$ mm untersucht. Die Diskretisierung des 3D-Modells, welche für die Berechnung der Lastverschiebungskurve des Profils zum Einsatz kam, ist für die Bestimmung der Spannungsverläufe ungeeignet. Aus diesem Grund werden hierfür insgesamt 40 Elemente für die Vernetzung in Dickenrichtung verwendet. Diese setzen sich aus 30 Elementen

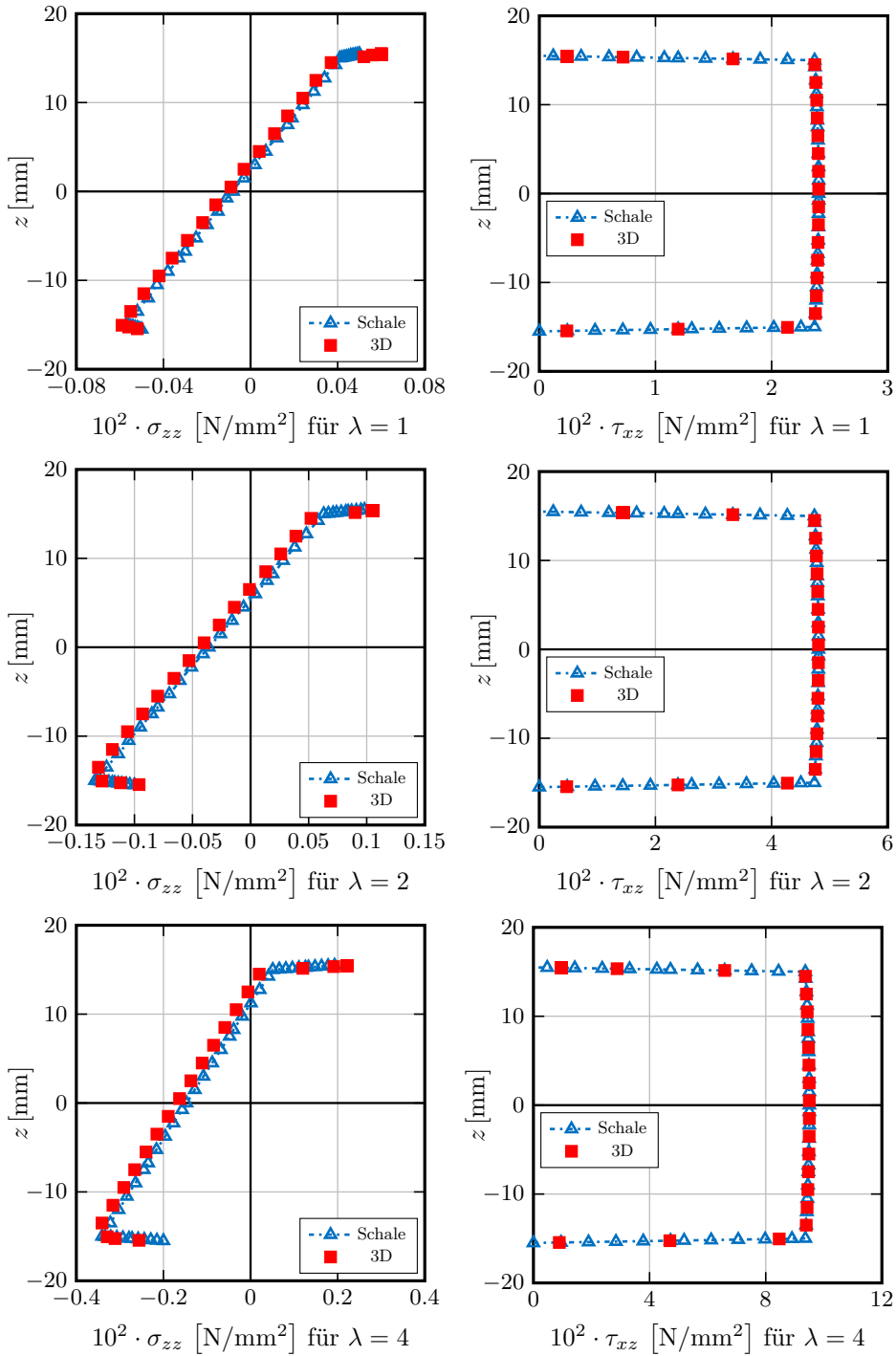


Abbildung 5.19: Verläufe der Spannungen in Dickenrichtung des Sandwichprofils für ausgewählte Lastfaktoren λ

für den Kern und jeweils fünf für die Deckschichten zusammen.

In Abb. 5.19 sind die Spannungsverläufe über die Dicke des Sandwichprofils aufgezeigt. Die obere Reihe enthält die Ergebnisse für einen Lastfaktor $\lambda = 1$. Es ist, ebenso wie für die Spannungen für $\lambda = 2$, eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung zu erkennen. Die untere Reihe zeigt die Verläufe für einen Lastfaktor von $\lambda = 4$. Hier sind in den Deckschichten bereits plastische Deformationen aufgetreten. Auch ist insgesamt ein Anstieg der Spannungen infolge der steigenden Belastung erkennbar. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das Schalenelement für inelastisches Materialverhalten akkurate Ergebnisse liefert.

Der verformte Sandwich-Plattenstreifen für $\lambda = 5$ ist in Abb. 5.18 zu sehen. Deutlich erkennbar ist die horizontale Verschiebung des Auflagers als Folge der geometrischen Nichtlinearität.

5.6 3-Punkt-Biegeversuch

Während in den vorherigen Beispielen elastisches, bzw. elasto-plastisches Materialverhalten angenommen wurde, liegt bei den folgenden Beispielen der Fokus auf der Berechnung von Delaminationen.

5.6.1 3-Punkt-Biegeversuch ohne Anfangsdelamination

In dieser ersten Anwendung wird ein 3-Punkt-Biegeversuch eines Laminats betrachtet. Dieses besteht aus 25 Schichten gleicher Dicke, die in einer $[0^\circ_{12}/90^\circ/0^\circ_{12}]$ -Folge angeordnet sind. Die 90° -Schicht in der Mitte des Laminats dient zur Initiierung der Delamination an dieser Stelle. Der Versuchsaufbau sowie das Modell für die Finite-Elemente-Simulation sind in Abb. 5.20 dargestellt.

Die Länge zwischen den Auflagern beträgt $L = 70$ mm, die Breite des Laminats ist $b = 20$ mm und die Höhe $h = 6.8$ mm. Die geometrischen Größen sowie die Versuchsergebnisse entstammen [58]. Bezüglich der Materialparameter verweisen die Autoren auf [113]. In Tabelle 5.7 sind die geometrischen Größen zusammen mit den elastischen Parametern für glasfaserverstärkte Polymere für den Fall transversaler Isotropie aufgelistet.

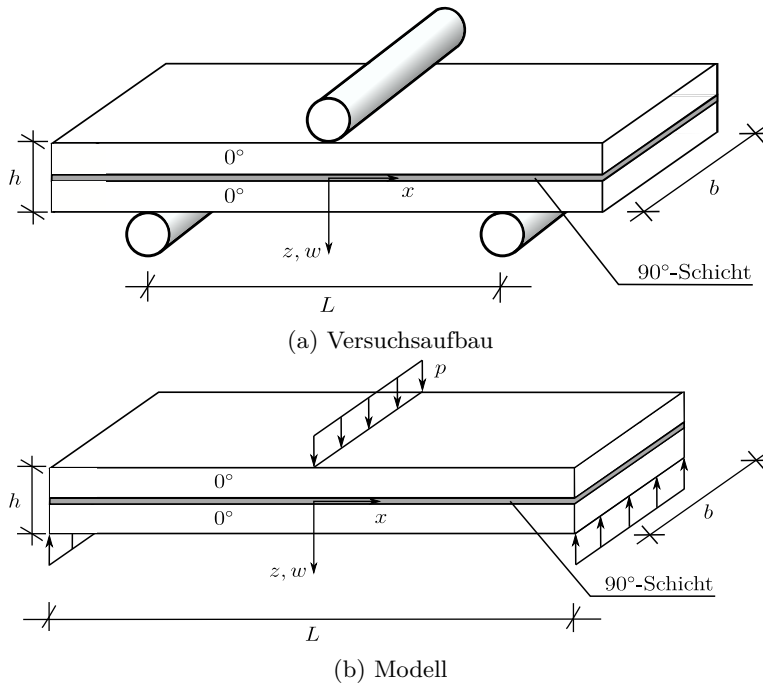


Abbildung 5.20: Vergleich des Versuchsaufbaus und des Modells für die Finite-Elemente-Simulation

In [113] werden keine Werte für den Schubmodul G_{23} und die kritische Spannung σ_c angegeben. Aus diesem Grund werden diese beiden Materialparameter gewählt. Da bei dem vorliegenden 3-Punkt-Biegeversuch Spannungen in x - bzw. $x-z$ -Ebene vorherrschen, ist der Einfluss von G_{23} auf das Ergebnis vernachlässigbar. Die kritische Spannung σ_c wird so gewählt, dass der Versagenspunkt des Laminats im Versuch korrekt abgebildet wird. Der Bruchparameter G_c folgt nach Gleichung (2.141) aus $G_c = g_c/h_I$.

Die Berechnung wird nach Ausnutzung der Symmetrie am halben Modell mit einem Netz der Größe $n \times 1$ durchgeführt, wobei n im Zuge einer Netzkonvergenzstudie bestimmt wird. In Dickenrichtung wird das Schalenelement mit insgesamt sieben Schichten verwendet. Diese setzen sich aus je zwei Schichten für die 0° - und 90° -Schichten sowie der dünnen Zwischenschicht h_I (siehe Kapitel 3) zusammen. Da die Delamination in der Mitte des Laminats stattfindet, wird die Zwischenschicht h_I dort platziert.

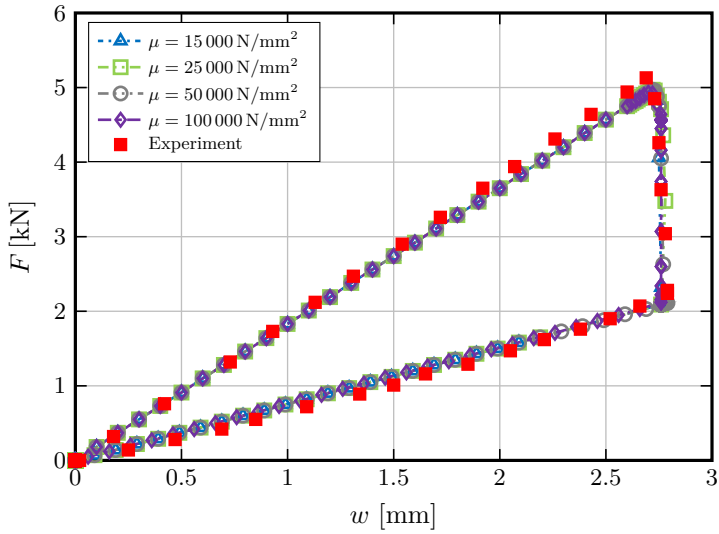
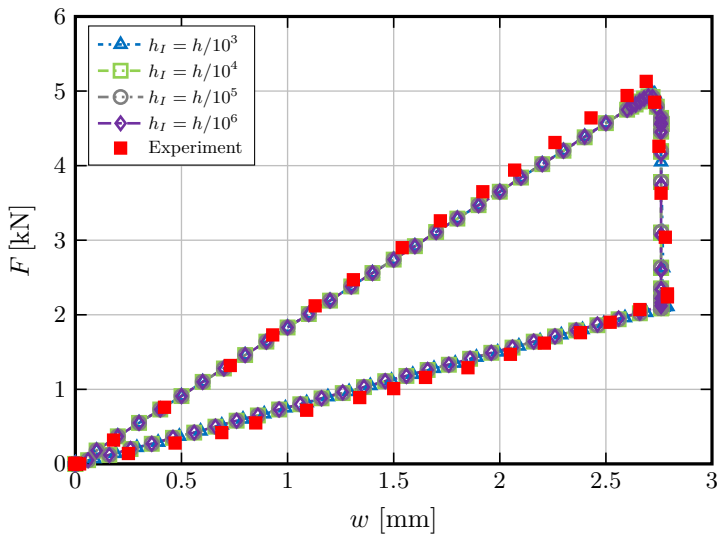
Tabelle 5.7: Geometrie und Materialdaten des 3-Punkt-Biegeversuchs

Geometrie				Material		
L	=	70	mm	E_1	=	28 600 N/mm ²
b	=	20	mm	E_2	=	6 000 N/mm ²
h	=	6.8	mm	G_{12}	=	2 200 N/mm ²
				G_{23}	=	2 000 N/mm ²
				ν_{12}	=	0.3
				σ_c	=	38.5 N/mm ²
				g_c	=	2.203 N/mm

Der Versuchsablauf besteht aus einer Belastung des Laminats, bis Delamination in der Mittelebene auftritt. Die Delamination tritt dabei als Folge der Schubbeanspruchung im Laminat auf. Im Anschluss wird die Probe vollständig entlastet. Hierbei bleibt festzuhalten, dass die Entlastung der Probe stattfindet, bevor sich die Delamination über die gesamte Länge ausgebreitet hat. Die Berechnung wird geometrisch linear unter Laststeuerung durchgeführt. Dabei wird die Absenkung in der Mitte des Laminats w im Verhältnis zur aufgebrachten Kraft $F = p \cdot b$ betrachtet.

Die Verwendung des Schädigungsmodells nach Abschnitt 2.7 erfordert neben den Materialkonstanten der kritischen Spannung σ_c und der Bruchzähigkeit g_c weiterhin die Kenntnis der Steifigkeit μ der Zwischenschicht. Dies ist ein rein numerischer Parameter. Daher ist es notwendig, seinen Einfluss auf die Ergebnisse zu untersuchen. Abbildung 5.21 zeigt den Last-Verschiebungsverlauf für unterschiedliche Steifigkeiten der Zwischenschicht, beginnend mit $\mu = 15\,000\text{ N/mm}^2$ bis zu einem Wert von $\mu = 100\,000\text{ N/mm}^2$. Dabei wird ein Netz mit $n = 50$ Elementen in x -Richtung des Laminats und eine Zwischenschichtdicke von $h_I = h/10^3$ gewählt. Die Ergebnisse zeigen, dass die Steifigkeit μ keinen Einfluss auf die Ergebnisgüte hat.

Im nächsten Schritt wird durch die Variation der Zwischenschichtdicke h_I , als weiterer numerischer Parameter, ihr Einfluss auf das Ergebnis überprüft. Dabei werden die Zwischenschichtsteifigkeit zu $\mu = 50\,000\text{ N/mm}^2$ und die Anzahl der Elemente zu $n = 50$ gewählt. Der Verlauf in Abb. 5.22 stellt die Ergebnisse dar. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchsdaten bei gleichzeitiger Unempfindlichkeit gegenüber der Änderung der Zwischenschichtdicke h_I .

Abbildung 5.21: Variation der Zwischenschichtsteifigkeit μ Abbildung 5.22: Variation der Zwischenschichtdicke h_I

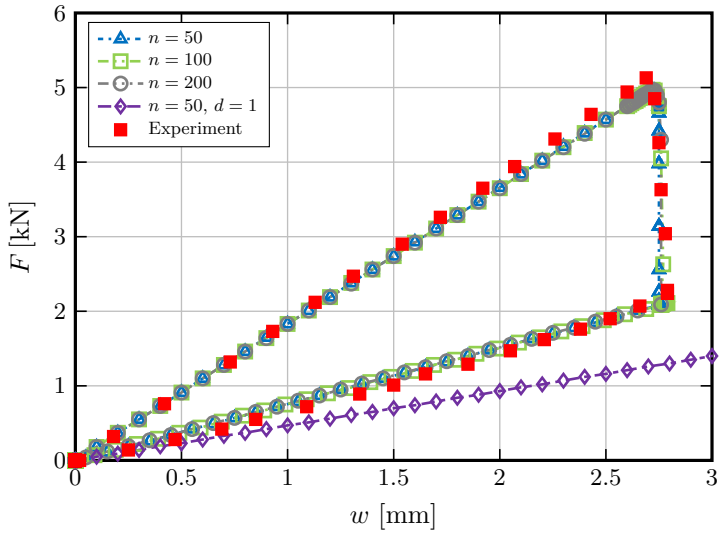
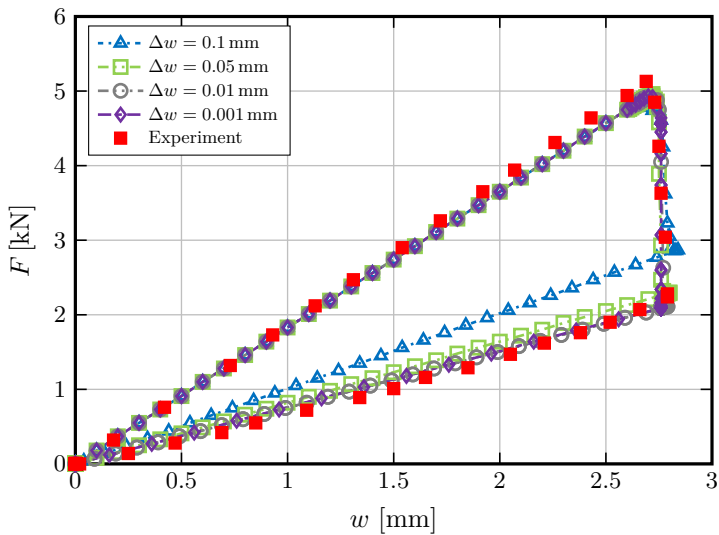


Abbildung 5.23: Netzkonvergenz und vollständige Delamination

Abbildung 5.24: Variation der Lastschrittgröße Δw

Netzabhängigkeit ist ein häufig auftretendes Problem, welches im Zusammenhang mit der Simulation von Schädigungseffekten mittels der Finiten-Elemente-Methode auftritt. Dies bedeutet, dass die Ergebnisse von der verwendeten Diskretisierung abhängen. Um eine mögliche Netzabhängigkeit zu untersuchen, wird der Versuch mit unterschiedlicher Elementanzahl berechnet, beginnend mit $n = 50$ bis $n = 200$. Für die Zwischenschichtsteifigkeit bzw. -dicke werden die Werte $\mu = 50\,000\text{ N/mm}^2$ und $h_I = h/10^3$ angenommen. In Abb. 5.23 ist zu erkennen, dass die Ergebnisse nicht von der Diskretisierung des Problems abhängen. Weiterhin ist im Diagramm der Verlauf für $d = 1$, also vollständiger Delamination über die gesamte Laminatlänge, eingezeichnet. Für diesen Fall beträgt die Steigung genau $1/4$ der linearen Kurve. Dies entspricht der Steifigkeit von zwei vollständig voneinander abgelösten Laminaten gleicher Dicke $h/2$.

Abschließend wird der Einfluss der Lastschrittgröße Δw analysiert. In Abb. 5.24 ist der Verlauf für $0.1\text{ mm} \geq \Delta w \geq 0.001\text{ mm}$ gezeigt. Der lineare Anstieg wird dabei stets mit einem konstanten Wert von $\Delta w = 0.1\text{ mm}$ berechnet. Es wird deutlich, dass ein Lastschritt von $\Delta w = 0.1$ zu groß ist, um den plötzlichen Steifigkeitsabfall infolge der Delamination exakt abzubilden. Gleichzeitig ist eine Konvergenz für kleinere Lastschritte zu beobachten.

In den Abbildungen 5.25 und 5.26 sind die Verläufe der Normalspannung σ_x und der Querschubspannung σ_{xz} an der Stelle $x = L/12$ über die Laminatdicke h für ausgewählte Absenkungen w dargestellt. Dabei werden sowohl die Spannungen im elastischen Bereich $0\text{ mm} \geq w \geq 2.50\text{ mm}$, als auch für den Beginn der Delamination $w = 2.70\text{ mm}$ und den vollständig delaminierten Zustand $w = 2.70\text{ mm}$ mit $d = 1$ betrachtet. Die Delamination verursacht einen Sprung der Normalspannungen σ_x in der Mittelebene. Die Querschubspannungen werden infolge der Delamination geringer, bzw. zu Null für vollständige Delamination, siehe Abb. 5.26.

5.6.2 3-Punkt-Biegeversuch mit Anfangsdelamination

Dieses Beispiel ist dem 3-Punkt-Biege-Versuch aus dem vorherigen Abschnitt sehr ähnlich. Jedoch wird in dieser Ausführung nach [24] eine Probe mit einem bereits delaminierten Bereich untersucht. Das Laminat besteht aus 20 unidirektionalen Schichten aus glasfaserverstärktem Kunststoff mit identischer Dicke $h^i = 0.25\text{ mm}$. Die Anfangsdelamination ist in Abb. 5.27 durch die Länge L_0 gekennzeichnet und

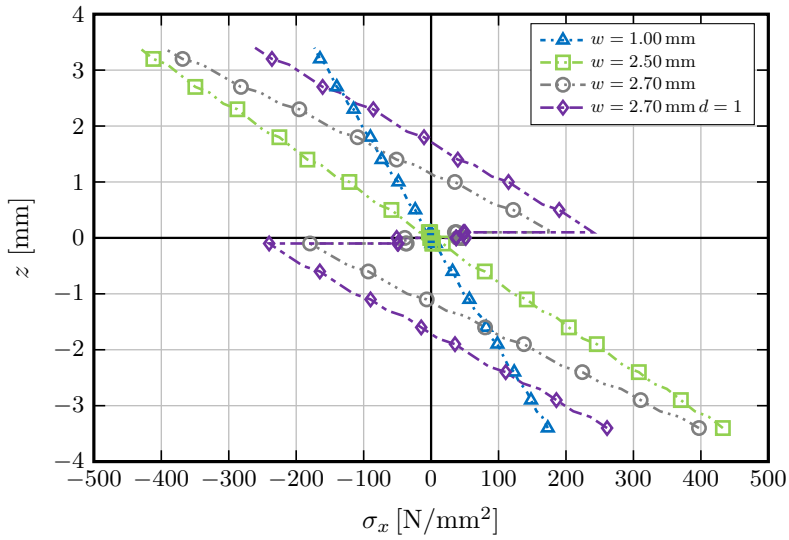


Abbildung 5.25: Normalspannung σ_x ($x = L/12$) für verschiedene Werte von w

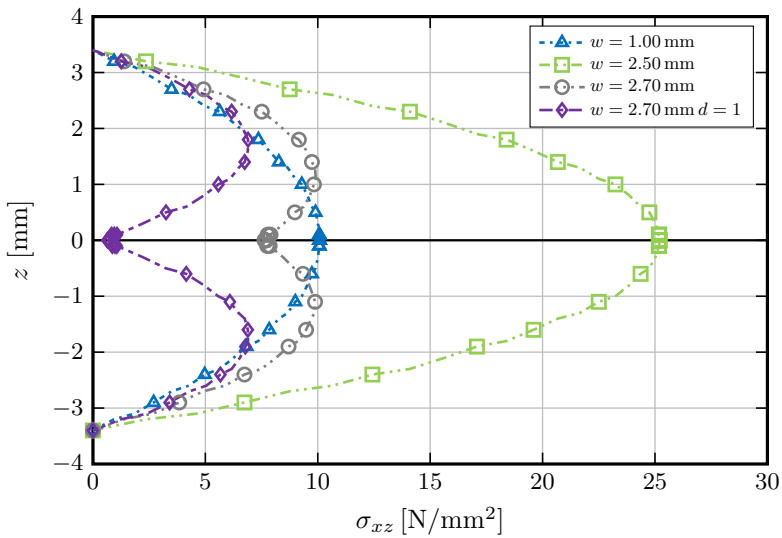


Abbildung 5.26: Querschubspannung σ_{xz} ($x = L/12$) für verschiedene Werte von w

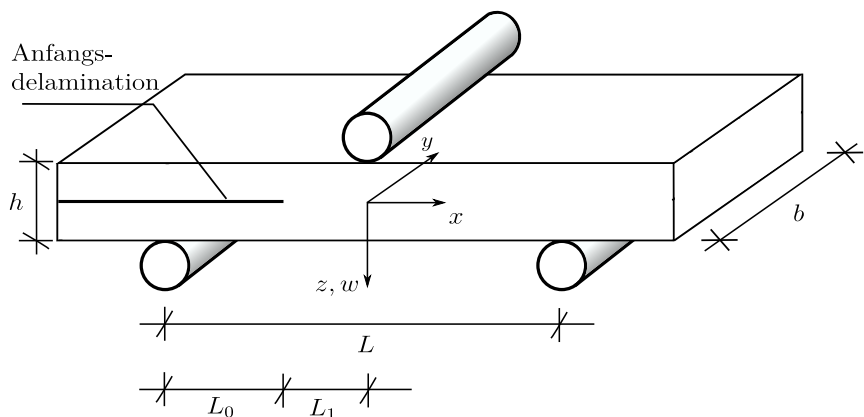


Abbildung 5.27: 3-Punkt-Biegeversuch mit anfänglicher Delamination

ist in der Probe durch eine Teflonschicht zwischen der zehnten und elften Schicht, also in der Mitte des Laminats ($z = 0$), realisiert. Die Teflonschicht wird im Finite-Element-Modell durch Elemente abgebildet, in denen für die Schädigungsvariable $d_n = 1$ gilt. Die Abmessungen und Materialdaten sind in Tabelle 5.8 aufgelistet.

Die experimentellen Ergebnisse von drei Versuchen sind in den Diagrammen durch die graue Fläche dargestellt. Sie stammen ebenfalls aus [24] und zeigen den Verlauf der Absenkung w in Laminatmitte $(x, y) = (0, 0)$ in Abhängigkeit des Lastniveaus. Es ist ein linearer Anstieg der Last bis zu einem Wert von $F \approx 1.1 \text{ kN}$ zu erkennen, bevor die Delamination einsetzt und in einem starken Abfall der Steifigkeit resultiert.

Tabelle 5.8: Geometrie und Materialdaten [24]

Geometrie				Material			
L	=	100	mm	E_1	=	28 875	N/mm ²
b	=	24	mm	E_2	=	6 560	N/mm ²
h	=	4	mm	G_{12}	=	1 680	N/mm ²
L_0	=	30	mm	G_{23}	=	1 400	N/mm ²
L_1	=	20	mm	ν_{12}	=	0.25	
				σ_c	=	100	N/mm ²
				g_c	=	0.38	N/mm

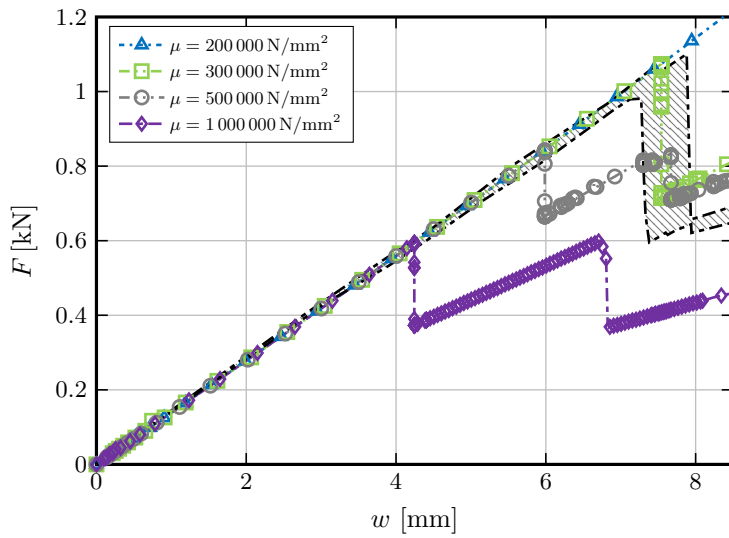
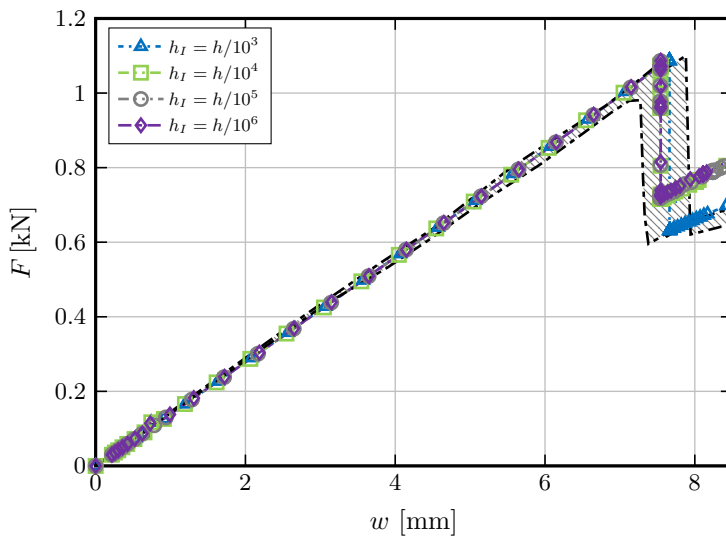
Die numerischen Berechnungen werden am halben System, durch Ausnutzung der Symmetrie in y -Richtung des Laminats, durchgeführt. Dabei wird ein Netz mit $n \times 1$ Elementen und eine Diskretisierung mit drei Schichten in Dickenrichtung verwendet. Das Problem wird ebenfalls verschiebungsgesteuert berechnet. Im Folgenden wird erneut der Einfluss numerischer Parameter auf die Ergebnisse untersucht.

Der erste Verlauf in Abb. 5.28 zeigt die Variation der Zwischenschichtsteifigkeit μ . Hierfür wurde ein Netz mit 100×1 Elementen und eine Zwischenschichtdicke von $h_I = h/10^4$ verwendet. Im Gegensatz zu dem Versuch ohne Anfangsdelamination im vorherigen Abschnitt liegt hier eine Abhängigkeit der Ergebnisse von μ vor. Bei steigenden Steifigkeiten setzt die Delamination früher ein. Für einen Wert von $\mu = 300\,000 \text{ N/mm}^2$ zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

Des Weiteren wird für ein konstantes $\mu = 300\,000 \text{ N/mm}^2$ und ein Netz mit 100×1 Elementen der Einfluss der Zwischenschichtdicke h_I untersucht. Erneut zeigt sich eine Konvergenz für geringere Dicken der Schicht. Abbildung 5.28 zeigt, dass bei diesem Beispiel eine Zwischenschichtdicke von $h_I = h/10^4$ ausreichend für eine Konvergenz der Ergebnisse ist. Für $h_I = h/10^3$ treten noch Abweichungen auf.

Zuletzt wird in Abb. 5.30 die Netzkonvergenz anhand dieses Beispiels untersucht. Mit den Werten $\mu = 300\,000 \text{ N/mm}^2$ und $h_I = h/10^4$ wird der Versuch mit verschiedenen Netzen berechnet, beginnend mit $n = 25$ bis $n = 150$ Elementen. Es wird deutlich, dass eine Elementanzahl von $n = 100$ in Längsrichtung ausreichend ist und für eine weitere Verfeinerung des Netzes Konvergenz eintritt.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass das Schalenelement einen 3-Punkt-Biegeversuch unter Berücksichtigung einer zu Beginn existierenden Delamination abbilden kann. Es besteht jedoch eine Abhängigkeit der Ergebnisse vom numerischen Parameter der Zwischenschichtsteifigkeit μ .

Abbildung 5.28: Variation der Zwischenschichtsteifigkeit μ Abbildung 5.29: Variation der Zwischenschichtdicke h_I

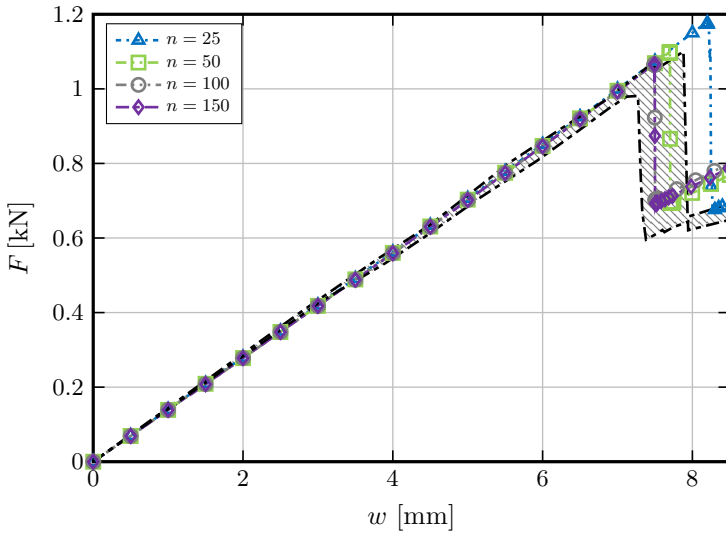


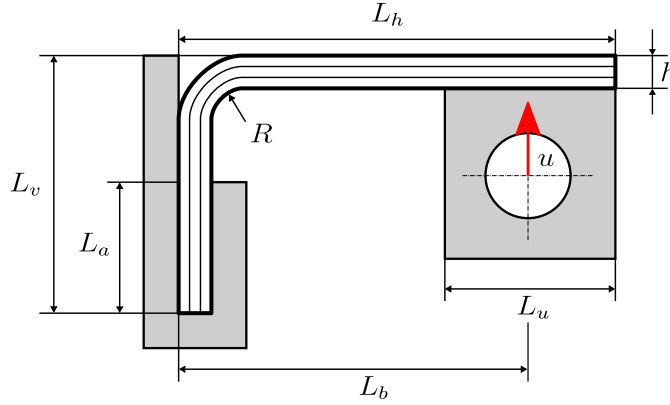
Abbildung 5.30: Netzkonvergenz

5.7 L-Profil

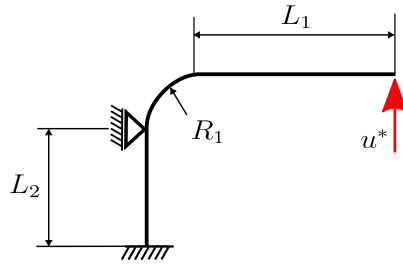
In diesem Beispiel wird ein L-Profil nach [107] untersucht. Es ist aus einem Laminat gefertigt, welches aus kohlefaserverstärkten Epoxidharz-UD-Schichten besteht. Der Versuch ist so aufgebaut, dass Delamination der Hauptversagensmodus ist. Das Laminat besteht aus insgesamt 30 Einzelschichten gleicher Dicke $h^i = 0.125$ mm, die in der Schichtfolge $[0^\circ_3/90^\circ_3/0^\circ_3/90^\circ_3/0^\circ_3]_s$ angeordnet sind. Dies und die Wahl der Materialien bewirkt ein Versagen durch Delamination, anstatt durch Faser- oder Matrixbruch.

Das L-förmige Profil ist an einem Ende eingespannt und wird am anderen durch eine vertikale Verschiebung u beansprucht. Hierfür ist das Laminat fest mit dem Metallblock des Versuchsaufbaus verklebt. Dieser Block kann um die eigene Achse rotieren, sodass infolge der Deformation der Radius der Krümmung vergrößert wird. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 5.31 dargestellt. Die Geometrie- und Materialdaten sind Tabelle 5.9 zu entnehmen. Der Wert für die kritische Spannung σ_c wurde gewählt.

Bezüglich der Finite-Elemente-Simulation werden einige Annahmen getroffen. Als Schalenmittelfläche dient die Mittelebene des realen L-Profils mit zugehörigem



(a) Versuchsaufbau



(b) FE-Modell

Abbildung 5.31: Vergleich des Versuchsaufbaus und des Modells für die Finite-Elemente-Simulation des L-Profiles

Radius $R_1 = 5.425 \text{ mm}$. Die Lagerung ist durch eine Einspannung an der Stelle $L_2 = 10.75 \text{ mm}$ unterhalb der Rundung realisiert. Um die Berandung des Versuchsaufbaus nachzubilden, wird das Profil horizontal gelagert. Der Einfluss des seitlichen Kontakts wurde in [107] untersucht und als vernachlässigbar beurteilt. Somit stellt diese Art der Lagerung eine vertretbare Annahme dar. Die Verschiebung u^* wird an der Stelle $L_1 = 25.575 \text{ mm}$ vorgegeben. Die resultierende Verschiebung u in der Mitte des Blocks berechnet sich anschließend mit

$$u = u^* \frac{L_1 + L_u/2}{L_1} . \quad (5.8)$$

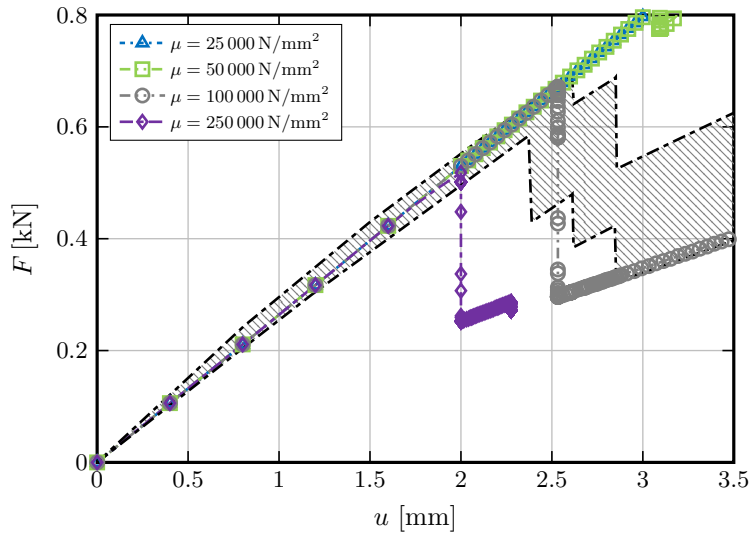
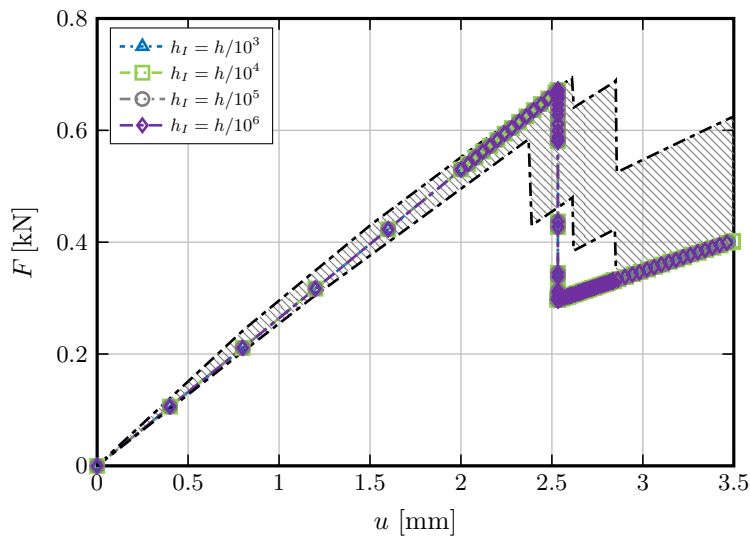
Tabelle 5.9: Geometrie und Materialdaten L-Profil nach [107]

Geometrie				Material			
L_h	=	50	mm	E_1	=	133 000	N/mm ²
L_v	=	29.5	mm	E_2	=	9 000	N/mm ²
L_a	=	15	mm	G_{12}	=	4 400	N/mm ²
L_b	=	41	mm	G_{23}	=	3 500	N/mm ²
L_u	=	20	mm	ν_{12}	=	0.35	
R	=	3.55	mm	σ_c	=	60	N/mm ²
h	=	3.75	mm	g_c	=	0.133	N/mm
b	=	30	mm				

Die Berechnung wird unter Ausnutzung der Symmetrie in Breitenrichtung am halben System durchgeführt. Dabei wird ein Element für die Diskretisierung in die Breite genutzt. Das Modell besitzt elf Schichten über die Dicke, wobei die UD-Schichten gleicher Orientierung zu jeweils einer Schicht zusammengefasst werden. Zusätzlich ist die Zwischenschicht mit der Dicke h_I in der Mitte des Laminats platziert.

In Abb. 5.32 und 5.33 sind Ergebnisse des Versuchs in Form einer Last-Verschiebungs-Kurve dargestellt. Es ist ein nahezu linearer Verlauf bis zu einem Wert von $F = 0.67 \text{ kN}$ zu erkennen. Danach setzt die Delamination im Bereich der Krümmung im Übergang zum horizontalen Teil des Profils ein und verursacht einen starken Abfall der Steifigkeit. Bei einer Weiterbelastung stellt sich erneut ein linearer Verlauf mit verminderter Steigung ein. Die Versuchsergebnisse basieren auf drei verschiedenen Versuchen, die in der grau schraffierten Fläche zusammengefasst sind.

Zu Beginn wird der Einfluss der Steifigkeit der Zwischenschicht untersucht. Hierfür wird ein Netz mit $n = 387$ Elementen in Längsrichtung des Laminats verwendet. Die Dicke der Zwischenschicht beträgt $h_I = h/10^3$. Wie im vorherigen Beispiel des 3-Punkt-Biegeversuchs mit Anfangsdelamination, zeigt sich hier eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Größe der Zwischenschichtsteifigkeit μ . In Abb. 5.32 ist zu sehen, dass ein steigender Wert für μ eine frühere Initialisierung der Delamination mit sich zieht.

Abbildung 5.32: Variation der Zwischenschichtsteifigkeit μ Abbildung 5.33: Variation der Zwischenschichtdicke h_I

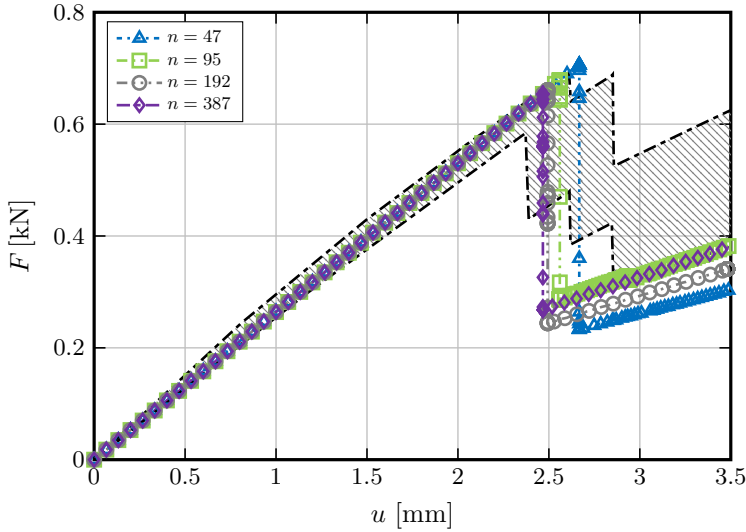


Abbildung 5.34: Netzkonvergenz

Für einen Wert von $\mu = 250\,000\text{ N/mm}^2$ zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Folglich wird mit diesem Wert der Einfluss der Zwischenschichtdicke h_I untersucht. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.33 zusammengefasst. Es zeigt sich, wie im vorherigen Beispiel, keine Abhängigkeit der Ergebnisse. Abschließend zeigt Abb. 5.34 die Resultate für eine Untersuchung der Netzkonvergenz. Hierfür wird $\mu = 250\,000\text{ N/mm}^2$ und $h_I = h/10^3$ gewählt. Es ist für eine feinere Diskretisierung eine Konvergenz der Ergebnisse erkennbar.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass das Schalenmodell diesen Versuch gut abbilden kann, jedoch mit der Einschränkung, dass die Ergebnisse von der numerischen Größe der Zwischenschichtsteifigkeit μ abhängen. Dies wurde bereits im vorherigen Beispiel des 3-Punkt-Biegeversuchs mit Anfangsdelamination festgestellt. Die Wahl der Steifigkeiten in numerischen Modellen zur Berechnung von Schädigung oder Delamination ist und war Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen. Gerade in Bezug auf sogenannte Interface-Elemente ist eine Evaluation der Steifigkeit notwendig. In [114] wird dieses Thema detailliert erörtert und eine umfangreiche Übersicht über Annahmen verschiedener Autoren geliefert. Dabei werden für die Interfacesteifigkeit vorgeschlagen, welche auch in den hier gezeigten Versuchen gute Ergebnisse liefert. Darüber hinaus haben die übrigen numerischen Parameter keinen Einfluss auf die Ergebnislage, wie die Berechnungen gezeigt haben.

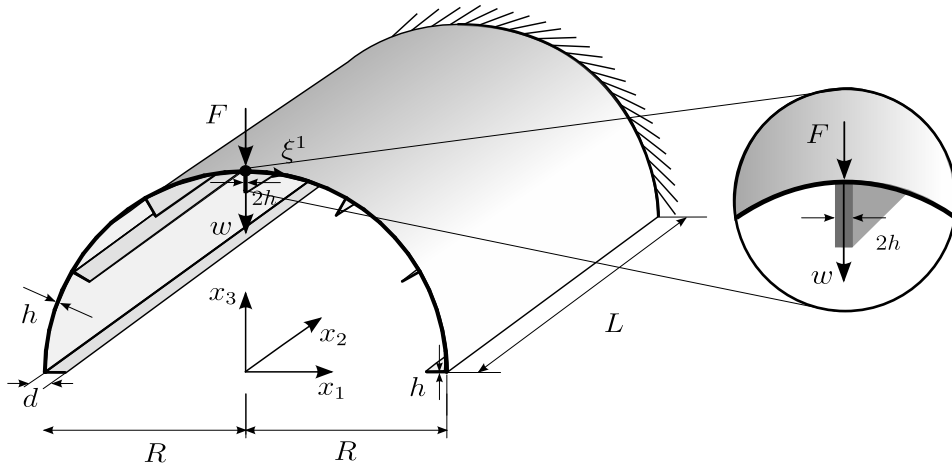


Abbildung 5.35: Darstellung der ausgesteiften Zylinderschale

5.8 Ausgesteifte Zylinderschale

Im letzten Beispiel wird eine ausgesteifte Zylinderschale untersucht. Dabei steht im ersten Abschnitt die elastische Untersuchung unter Berücksichtigung großer Deformationen im Fokus. Anschließend wird das Verhalten der Zylinderschale bei Auftreten von Delamination untersucht.

Abbildung 5.35 zeigt die ausgesteifte Schale. Sie besitzt als Abmessungen den Radius $R = 1000 \text{ mm}$, die Tiefe $L = 2000 \text{ mm}$ und die Dicke $h = 10 \text{ mm}$. Entlang des Zylinders sind Steifen der Länge $d = 50 \text{ mm}$ und Dicke $h = 10 \text{ mm}$ angeordnet. Einzig die Steife auf der Symmetrieachse ist $2h$ dick. Die Lagerung erfolgt durch eine Einspannung an der Stelle $y = L$, während das andere Ende frei bleibt.

Die Steifen sind homogen mit Faserrichtung in Längsrichtung ausgeführt. Die Haut der Zylinderschale besteht aus einem dreischichtigen Laminat mit der Schichtfolge $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Die Belastung erfolgt durch eine Einzellast F in der Mitte der Schale $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, R)$.

5.8.1 Elastische Analyse

Zuerst wird das elastische Deformationsverhalten für große Verformungen untersucht. Die elastischen Materialparameter sind identisch mit denen aus Abschnitt 5.3. Sie sind ebenso wie die Geometrie in Tabelle 5.10 zu finden.

Tabelle 5.10: Geometrie und Materialdaten der Zylinderschale

Geometrie				Material			
L	=	2 000	mm	E_1	=	125 000	N/mm ²
R	=	1 000	mm	E_2	=	7 400	N/mm ²
h	=	10	mm	G_{12}	=	4 800	N/mm ²
d	=	50	mm	G_{23}	=	2 700	N/mm ²
			mm	ν_{12}	=	0.34	

Unter Verwendung eines verschiebungsgesteuerten Bogenlängenverfahrens wird am halben System die nichtlineare Lastverschiebungskurve berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.37 dargestellt. Für die Berechnung wird ein Netz mit $l \times m \times n = 48 \times 32 \times 4$ Elementen genutzt. Dabei beschreibt l die Anzahl der Elemente in Umfangsrichtung, m in Längsrichtung und n die Anzahl der Elemente der Steifen in radialer Richtung. Das Modell wird mit sechs Schichten gerechnet, je zwei pro 0°- bzw. 90°-Lage. Das verwendete Netz ist in Abb. 5.36a abgebildet. Als Referenz dient ein Schalenelement, welches die interlaminaren Spannungen im Zuge einer Nachlaufrechnung bestimmt [91].

Der Vergleich der Ergebnisse in Abb. 5.37 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung. Das nichtlineare Deformationsverhalten wird im Verlauf der Lastverschiebungskurve deutlich. Der Abfall der Kurve bei $F \approx 140$ kN ist auf das Ausknicken der Steifen zurückzuführen. Dieser Effekt ist zusammen mit den großen auftretenden Verschiebungen in der endgültigen Deformationsfigur für $w = 850$ mm in Abb. 5.36b zu erkennen. Der Vergleich der Werte für die Verschiebung in x_3 -Richtung in Abb. 5.38 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem Schalenelement und der Referenzlösung.

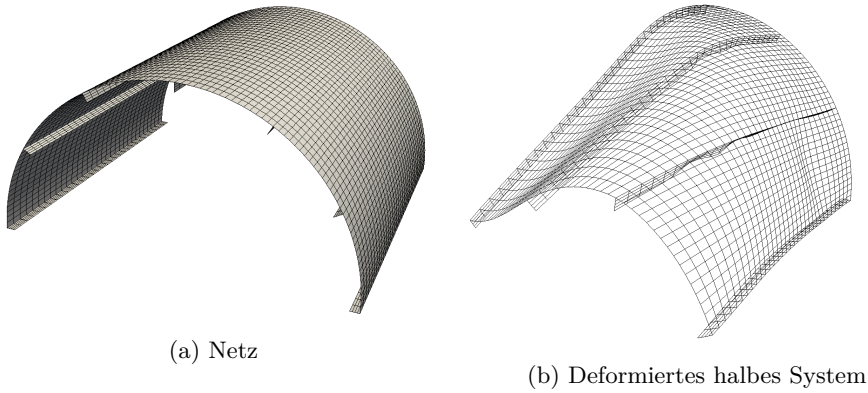
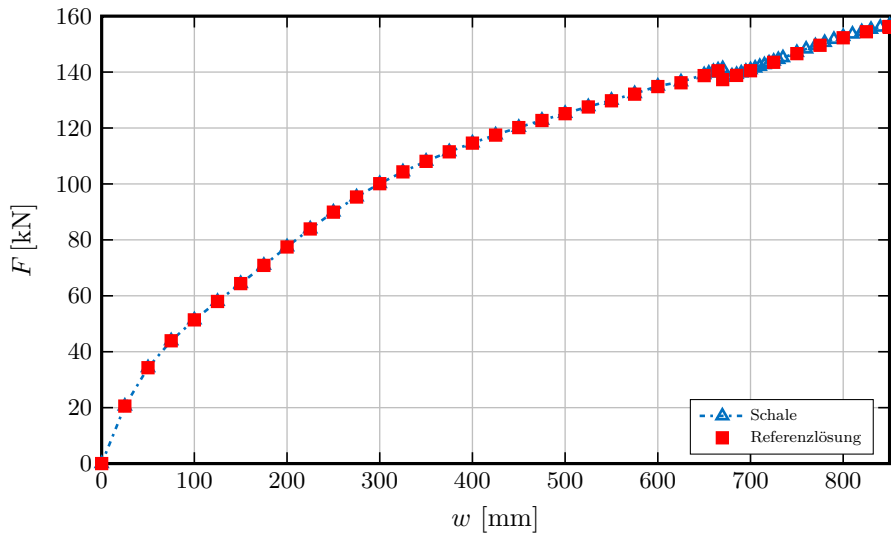
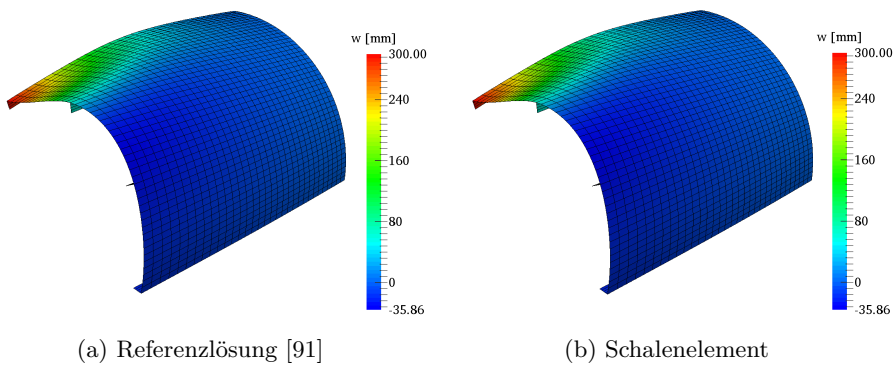
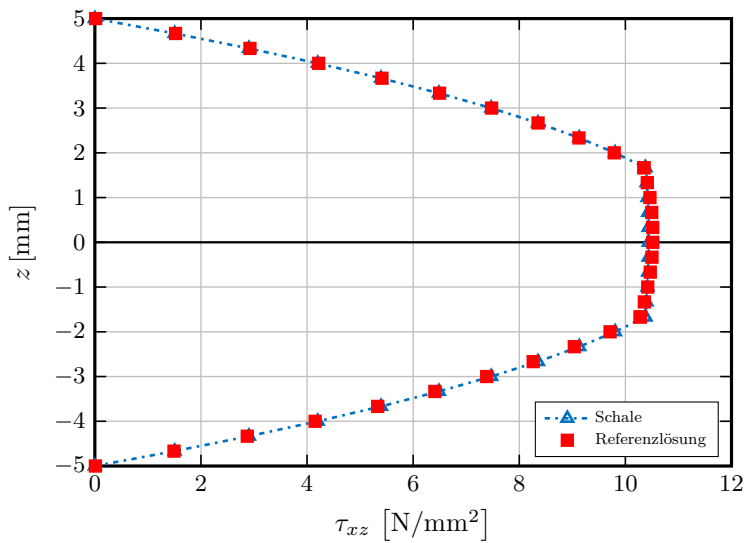
Abbildung 5.36: Finite-Elemente-Netz und Deformation für $w = 850$ mm

Abbildung 5.37: Lastverschiebungskurve der ausgesteiften Zylinderschale

Des Weiteren wird der Verlauf der Querschubspannung τ_{xz} an einem Punkt des Laminats mit den Koordinaten $\xi_p^1 = (13/96 \cdot \pi/2) \cdot R$ und $\xi_p^2 = 7/64 \cdot R$ analysiert. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.39 als Verlauf über die Laminatdicke dargestellt. Es wird deutlich, dass das Schalenelement nahezu identische Ergebnisse wie die Referenzlösung liefert.

Abbildung 5.38: Vergleich der Absenkung w für $F = 100$ kNAbbildung 5.39: Verlauf der Querschubspannung τ_{xz} an der Stelle $(\xi_p^1, \xi_p^2, \xi_p^3)$

5.8.2 Bestimmung der Resttragfähigkeit infolge Delamination

Im nächsten Schritt wird die Resttragfähigkeit der Zylinderschale infolge Delamination bestimmt. Die Geometrie und die elastischen Materialkonstanten bleiben hierbei unverändert. Zur Berechnung der Delamination werden die Bruchparameter nach [62] gewählt. Diese sind in Tabelle 5.11 dargestellt.

Tabelle 5.11: Bruchparameter nach [62]

Mode I				Mode II			
σ_{cI}	=	45	N/mm ²	σ_{cII}	=	100	N/mm ²
g_{cI}	=	0.158	N/mm	g_{cII}	=	0.315	N/mm

Das in Abschnitt 2.7 vorgestellte Schädigungsmodell unterscheidet nicht zwischen verschiedenen Versagensmoden. Daher werden die Bruchparameter in Tabelle 5.11 in getrennten Simulationen verwendet und jeweils die Resttragfähigkeit bestimmt. Für den jeweiligen Mode wird, mit einem aus $l \times m \times n = 48 \times 32 \times 4$ Elementen bestehenden Netz, der Einfluss der numerischen Parameter untersucht.

Die Ergebnisse für verschiedene Werte der Zwischenschichtsteifigkeit μ werden für die Mode-I-Daten in Abb. 5.40 und für die Mode-II-Daten in Abb. 5.42 gezeigt. Hierfür wird mit $h_I = h/10^3$ gerechnet. Es wird deutlich, dass in beiden Fällen Konvergenz für eine höhere Steifigkeit vorliegt, wobei ein Wert von $\mu \geq 500\,000$ N/mm² ausreicht.

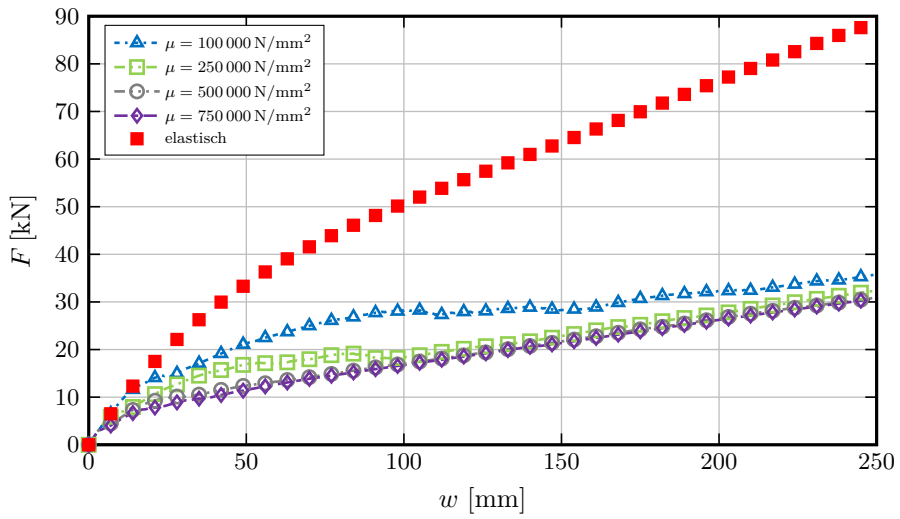
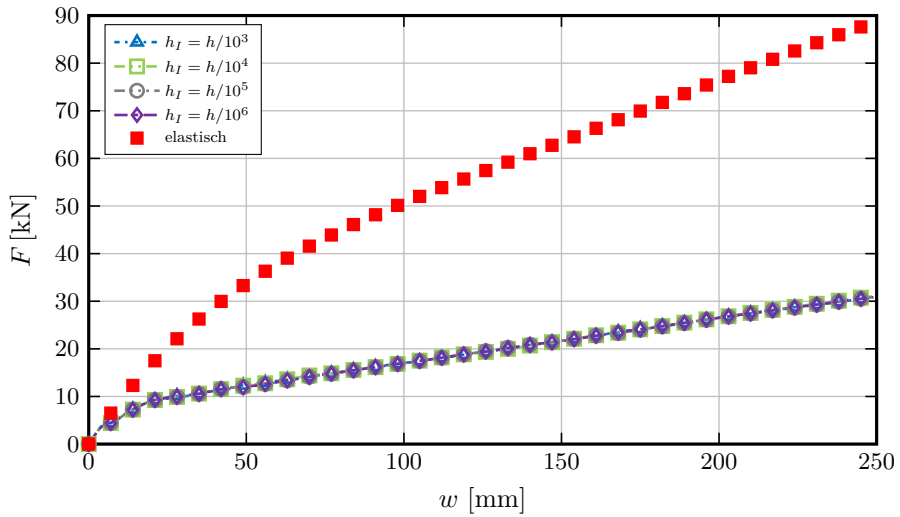
Wie in den vorherigen Beispielen ergibt die Variation der Zwischenschichtdicke h_I , dass die Ergebnisse unabhängig von dieser sind. Durch Abb. 5.41 und Abb. 5.43 wird deutlich, dass die Dicke für Werte von $h_I \leq h/10^3$ keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Die Verläufe werden jeweils mit einem Wert von $\mu = 500\,000$ N/mm² bestimmt.

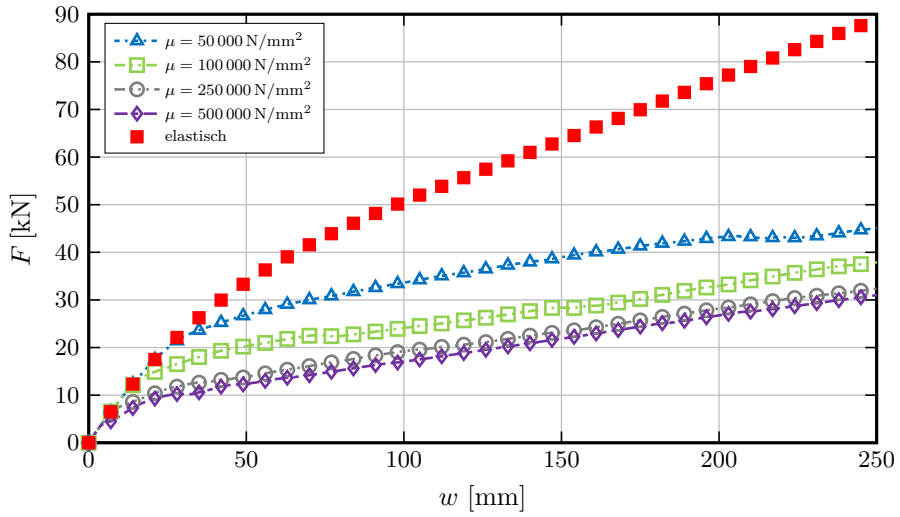
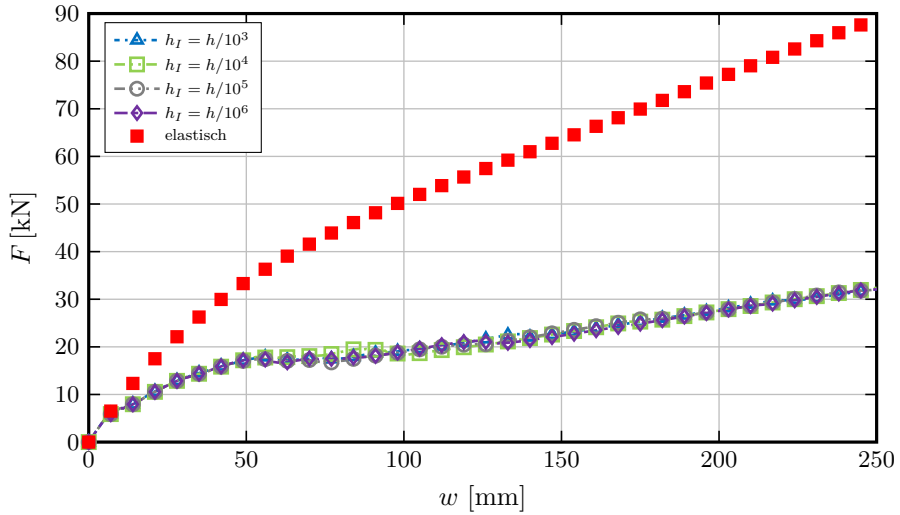
Unter Verwendung der Mode-I-Daten wird eine Untersuchung der Netzkonvergenz durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.44 dargestellt. Als Werte für die Zwischenschichtsteifigkeit werden $\mu = 500\,000$ N/mm² und für die Dicke $h_I = h/10^3$ gewählt. Es zeigt sich, dass ein Netz mit $l \times m \times n = 48 \times 32 \times 4$ eine ausreichende Genauigkeit liefert.

In Abb. 5.45 sind die Resultate für die Mode-I- und Mode-II-Daten zusammen

dargestellt. Zusätzlich ist der Verlauf für eine vollständige Delamination $d = 1$ über die gesamte Zylinderschalenfläche gezeigt. Es wird deutlich, dass die Verläufe der Mode-I- und Mode-II-Parameter zwischen der elastischen und der vollständig geschädigten Lösung liegen. Eine Abhängigkeit des jeweiligen Mode ist nur im Anfangsbereich zu erkennen. Die Resttragfähigkeit der ausgesteiften Zylinderschale $F_R \approx 30 \text{ kN}$ ist hingegen für beide Versagensmoden praktisch gleich.

Abschließend ist der Delaminationsvorschritt unter Berücksichtigung der Mode-I-Daten für ausgewählte Absenkungen w in den Abbildungen 5.46a bis 5.46f dargestellt. Deutlich erkennbar ist der Beginn der Delamination an der Lasteinleitungsstelle. Im Anschluss findet die Ausbreitung über einen Großteil der Zylinderschale statt, wobei anfangs die Bereiche um die zweite und dritte Steife ausgespart werden.

Abbildung 5.40: Variation der Zwischenschichtsteifigkeit μ für Mode I-DatenAbbildung 5.41: Variation der Zwischenschichtdicke h_I für Mode-I-Daten

Abbildung 5.42: Variation der Zwischenschichtsteifigkeit μ für Mode-II-DatenAbbildung 5.43: Variation der Zwischenschichtdicke h_I für Mode-II-Daten

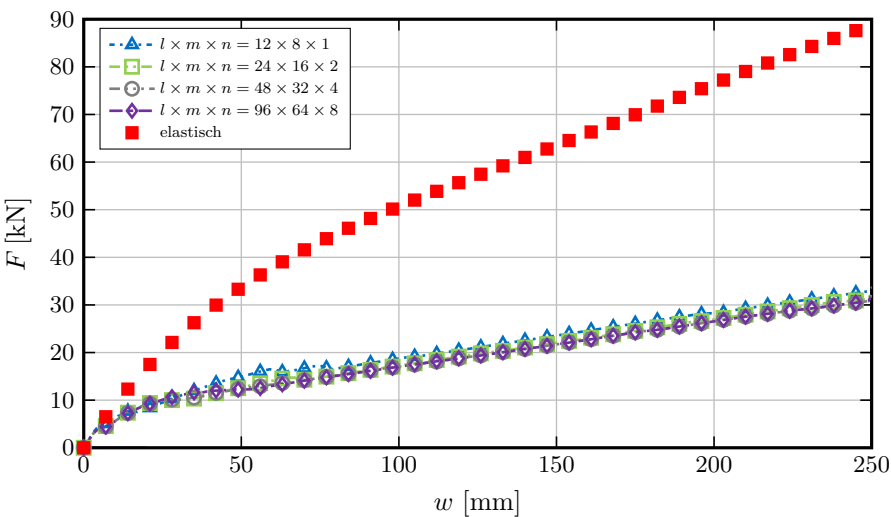


Abbildung 5.44: Netzkonvergenz für Mode-I-Daten

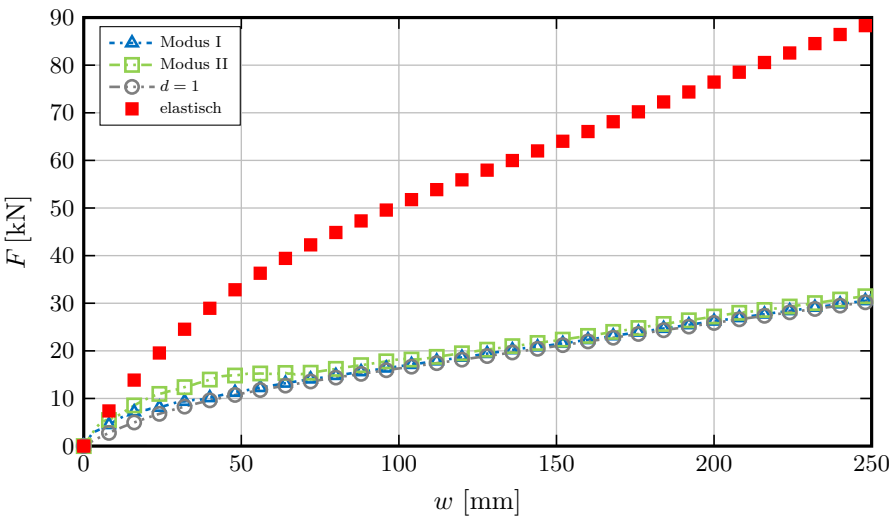
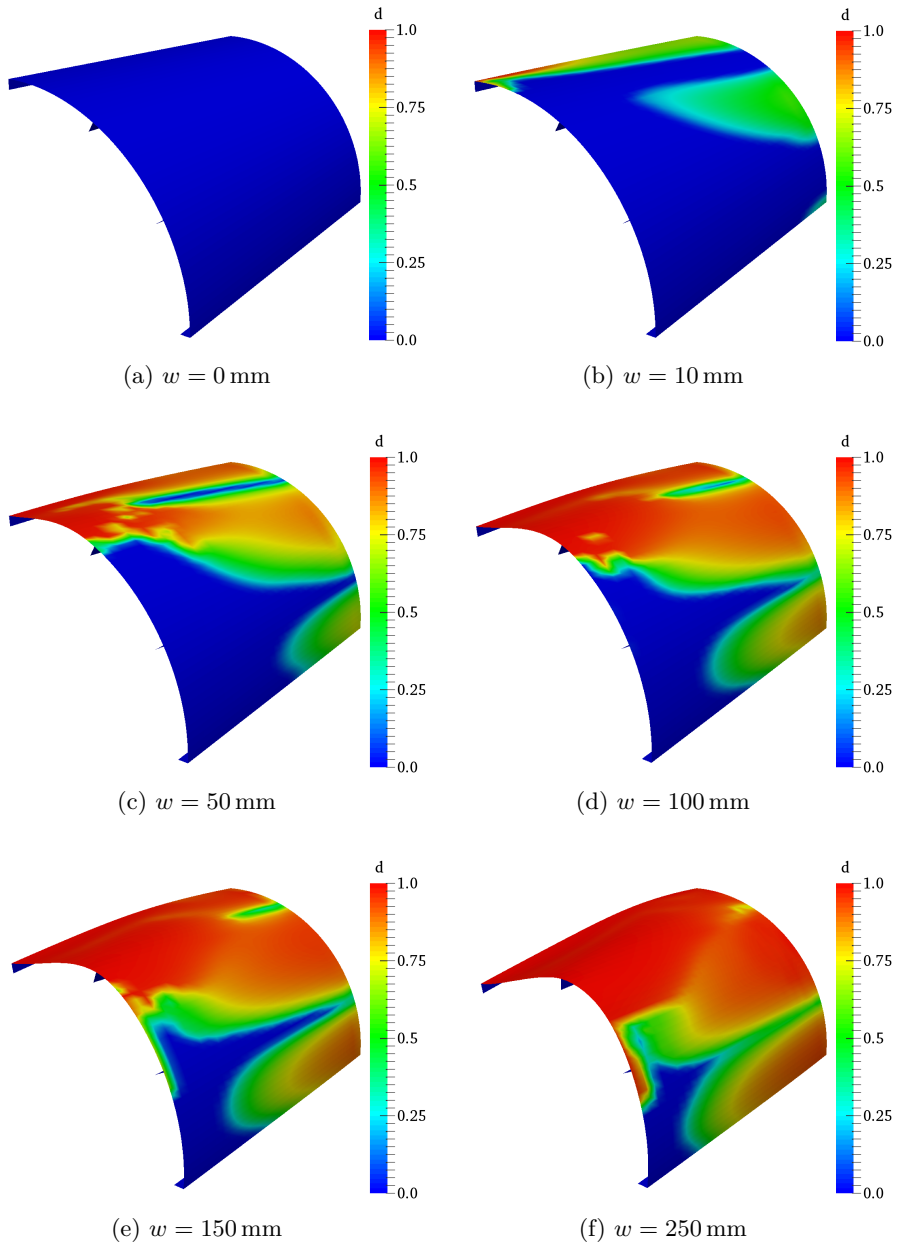


Abbildung 5.45: Vergleich Mode-I- und Mode-II-Daten

Abbildung 5.46: Fortschritt der Delamination für ausgewählte Werte von w

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Die Arbeit liefert einen Beitrag zur numerischen Berechnung interlaminarer Spannung und Delaminationen in geschichteten Strukturen mittels eines nichtlinearen Schalenmodells. Hierfür wird eine bestehende nichtlineare Elementformulierung, die auf der Reissner-Mindlin Schalenkinematik basiert, um Verwölbungen in Relativverschiebungen in Dickenrichtung erweitert. Diese Größen werden schichtweise mit hierarchischen kubischen Ansatzfunktionen interpoliert. Die Auswertung der Verwölbungen und Verschiebungen in Dickenrichtung der Schale liefert interlaminare Spannungen und Normalspannungen. Zur Abbildung der Delamination wird eine Sprungfunktion in Abhängigkeit einer Schädigungsvariablen eingeführt. Der Schädigungsvorgang selbst wird mit einem isotropen Schädigungsmodell für kleine Verzerrungen berechnet und findet in einer Zwischenschicht statt, die an einer beliebigen Stelle innerhalb des Laminats platziert werden kann.

Die zusätzlichen Verwölbungen und Verschiebungen sind variationell in die Gleichgewichtsgleichungen integriert. Dies erlaubt, im Gegensatz zu Post-Processing-Methoden, die Anwendung physikalisch nichtlinearer Materialmodelle. Die interlaminaren Spannungen sind für linear-elastische Probleme an den Schichtgrenzen kontinuierlich. Zudem entsprechen die über die Laminatdicke integrierten interlaminaren Schubspannungen exakt den zugehörigen Querkraften. Die Randbedingungen werden an den Oberflächen der Schale exakt erfüllt.

Die Schalenformulierung basiert auf einem gemischten Funktional, das neben den Verschiebungen zusätzlich Spannungen und Verzerrungen als unabhängige Feldgrößen beinhaltet. Diese werden mit geeigneten Ansatzfunktionen interpoliert. Die Verwölbungen und Verschiebungen in Dickenrichtung folgen als weitere unabhän-

gige Größen. Die Steifigkeitsmatrix resultiert aus der statischen Kondensation der zusätzlichen Feldgrößen. Dabei besitzt die Steifigkeitsmatrix den korrekten Rang und erfüllt sowohl den Membran-, als auch den Biege-Patch-Test. Das resultierende hybride Schalenelement besitzt nach der statischen Kondensation die Standard-Schalenfreiheitsgrade und ist daher auch für die Berechnung komplexer Geometrien geeignet.

Numerische Beispiele zeigen die Leistungsfähigkeit der Schalenformulierung. Interlaminare Spannungen werden sowohl für lineare als auch für geometrisch und physikalisch nichtlineare Probleme korrekt abgebildet. Die Ergebnisse der Untersuchung von gelenkig gelagerten Laminaten unter Gleichlast zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der interlaminaren Spannungen mit den Ergebnissen von Referenzlösungen. Dabei werden Querschub- und Normalspannungen in Dickenrichtung korrekt bestimmt. Der Vergleich der Rechenzeiten zeigt einen enormen Geschwindigkeitsvorteil des Schalenelements gegenüber dem Referenzmodell mit Volumenschalenelementen.

Neben elastischen Problemen werden auch Beispiele berechnet, bei denen Delamination als Versagensmodus auftritt. Dabei zeigt sich, dass das Schalenelement die Entfestigung durch Delamination abbilden kann und die resultierenden Lastverschiebungskurven mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen. Jedoch zeigt sich bei einigen Beispielen eine Abhängigkeit der Ergebnisse vom numerischen Parameter der Steifigkeit der Zwischenschicht.

Die Untersuchung dieser Abhängigkeit kann Gegenstand zukünftiger Forschung sein. Eine Eliminierung dieser Abhängigkeit ist notwendig, um allgemeingültige Aussagen zum Delaminationsverhalten zu treffen, ohne vorab Kenntnis über die Größe der Zwischenschichtsteifigkeit vorauszusetzen.

In der hier vorgestellten Elementformulierung kann die Zwischenschicht, in der das Schädigungsmodell Anwendung findet, an einer beliebigen Stelle im Laminat platziert werden. Jedoch ist die Anzahl der Zwischenschichten auf eine beschränkt. Der Vergleich mit realen Versuchen zeigt jedoch, dass durchaus Delamination zwischen mehreren Schichtpaaren im Laminat auftreten kann. Eine Erweiterung des Modells auf mehrere Delaminationsschichten erscheint somit als sinnvoll.

Nomenklatur

Griechische Buchstaben

α, β	Elastizitätskonstanten
$\bar{\psi}$	Vergleichsspannung
$\bar{\alpha}$	Interne Variable
$\bar{\alpha}_0$	Anfangswert der internen Variable
$\bar{\sigma}$	Effektiver Spannungstensor
$\bar{\theta}$	Ortvektor im deformierten Schalenraum
$\bar{\chi}$	Maß für Streckung der Fasern
$\bar{\mu}$	Determinante des Shifter-Tensors
η	Testfunktion
$\lambda_{\varepsilon 1}, \lambda_{\kappa 1}, \lambda_{\kappa 2}$	Ableitungen der Verzerrungen und Krümmungen
Ω	Schiefsymmetrischer Tensor
ω	Rotationsvektor
Φ	Matrix der hierarchischen kubischen Interpolations-Funktionen der Verwölbungen
σ	Vektor der unabhängigen Schnittgrößen
τ	Kirchhoffscher Spannungstensor
Θ	Ortvektor im undeformierten Schalenraum
θ	Vektor der unbekannten Größen
ε	Physikalische Schalenverzerrungen
ε^{el}	Elastische Verzerrungen
ε^{lin}	Linearisierter Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
ε^{pl}	Plastische Verzerrungen
ε_g	Geometrische Schalenverzerrungen

α	Vektor der Verwölbungen und Relativverschiebungen in Dickenrichtung
χ	Materieller Punkt
Δ	Linearisierungsoperator
δ	Variationsoperator
δ^i	Äquivalente Verschiebungen
δ_j^i	Kronecker-Delta
Γ	Rand des Gebiets Ω
γ_α	Schubverzerrungen
$\kappa_{\alpha\beta}$	Krümmungen
λ	Elastizitätskonstante
Λ, μ	Lamé-Konstanten
μ_L, μ_T	Elastizitätskonstanten
Ω_0	Referenzfläche der Schale in der Referenzkonfiguration
Ω_t	Referenzfläche der Schale in der Momentankonfiguration
$\partial\Omega_t$	Rand des Kontinuumskörpers in der Momentankonfiguration
Π	Gesamtpotential
Π_{ext}	Äußeres Potential
Π_{int}	Inneres Potential
Ψ	Helmholtz-Potential
Ψ^e	Elastisches Helmholtz-Potential
ρ	Massendichte in der Momentankonfiguration
ρ_0	Massendichte in der Referenzkonfiguration
σ_c	Kritische Spannung
τ_s	Spannungsnorm
ε^{el}	Plastische Verzerrungen
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	Membranverzerrungen
φ	Abbildung des Körpers in die Momentankonfiguration
φ_0	Abbildung des Körpers in die Referenzkonfiguration
ξ, η	Isoparametrische Koordinaten
ξ^i	Konvektive Koordinaten
ζ	Normierte Schichtkoordinate

Lateinische Buchstaben

$\bar{\mathbf{a}}^i$	Assemblierungsmatrix
$\bar{\mathbf{p}}$	Oberflächenlasten auf Ω_0
$\bar{\mathbf{r}}$	Ortsvektor bezüglich Referenzpunkt \mathbf{x}_0
$\bar{\mathbf{t}}_0$	Vorgegebener Spannungsvektor auf dem Rand
$\bar{\mathbf{u}}_0$	Vorgegebene Verschiebung auf dem Rand
$\bar{\mathbf{Z}}$	Shifter-Tensor in Momentankonfiguration
δW_{ext}	Virtuelle äußere Arbeit
δW_{int}	Virtuelle innere Arbeit
$\dot{\mathbf{I}}$	Zeitliche Änderung des Impulses
$\dot{\mathbf{J}}$	Zeitliche Änderung des Drehimpulses
$\hat{\mathbf{E}}$	Greenscher Verzerrungstensor in Schalenreferenzfläche
$\hat{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient in Schalenreferenzfläche
$\hat{\mathbf{S}}$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor in Schalenreferenzfläche
$\hat{\mathbf{T}}$	Transformationsmatrix von globalem zu lokalem Greenschem-Verzerrungstensor
\mathcal{C}	Elastizitätstensor
\mathcal{B}	Kontinuumskörper
\mathcal{B}_0	Kontinuumskörper in Referenzkonfiguration
\mathcal{B}_t	Kontinuumskörper in Momentankonfiguration
\mathcal{E}	Innere Energie
\mathcal{K}	Kinetische Energie
\mathcal{P}_{ext}	Leistung aller äußeren Lasten
\mathcal{P}_{int}	Leistung aller inneren Lasten
\mathcal{Q}	Thermische Leistung
$\partial \mathcal{B}$	Rand des Kontinuumskörpers
$\partial_\alpha W$	Spannungsresultierende höherer Ordnung
$\partial_\varepsilon W$	Spannungsresultierende
$\tilde{\mathbf{T}}$	Transformationsmatrix von globalem zu lokalem Basissystem
$\tilde{\mathbf{u}}$	Überlagertes Verschiebungsfeld
$\mathbf{1}$	Einheitstensor

\mathbf{A}^i	Kontravariante Basis auf Ω_0
\mathbf{a}^i	Kontravariante Basis auf Ω_t
\mathbf{a}_0	Vektorfeld der Faserrichtung
\mathbf{A}_i	Kovariante Basis auf Ω_0
\mathbf{a}_i	Kovariante Basis auf Ω_t
\mathbf{b}	Linker Cauchy-Green-Tensor
\mathbf{b}_0	Volumenlasten
\mathbf{C}	Rechter Cauchy-Green-Tensor
\mathbf{C}_G	Materialmatrix in globalen Koordinaten
\mathbf{C}_L	Materialmatrix in lokalen Schichtkoordinaten
\mathbf{C}_T	Tangentenmatrix
\mathbf{d}	Direktor in Momentankonfiguration
\mathbf{E}	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
\mathbf{E}^G	Globaler Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
\mathbf{E}^L	Lokaler Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
\mathbf{e}_i	Kartesische Koordinatenbasis
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{f}	Kraftvektor
\mathbf{G}^i	Kontravariante Basissystem in der Referenzkonfiguration
\mathbf{g}^i	Kontravariante Basissystem in der Momentankonfiguration
\mathbf{G}_i	Kovariante Basissystem in der Referenzkonfiguration
\mathbf{g}_i	Kovariante Basissystem in der Momentankonfiguration
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
\mathbf{m}_0	Resultierendes Moment
\mathbf{N}_0	Einheitsnormalen Vektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{N}	Direktor in Referenzkonfiguration
\mathbf{n}	Einheitsnormalen Vektor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{n}^\alpha, \mathbf{m}^\alpha$	Schnittgrößen
\mathbf{P}	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
\mathbf{Q}	Orthogonaler Tensor
\mathbf{R}	Rotationstensor
\mathbf{S}	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

\mathbf{s}	Spannungsdeviator
\mathbf{T}	Cauchyscher Spannungstensor
\mathbf{t}	Cauchyscher Spannungsvektor in der Momentankonfiguration
\mathbf{t}'_i	Lokales Basissystem
\mathbf{t}_0	Cauchyscher Spannungsvektor in der Referenzkonfiguration
\mathbf{t}_i	Globales Basissystem
\mathbf{U}	Rechter Strecktensor
\mathbf{v}	Linker Strecktensor
\mathbf{v}_0	Geschwindigkeit in der Referenzkonfiguration
\mathbf{X}	Ortvektor in Referenzkonfiguration
\mathbf{x}	Ortvektor in Momentankonfiguration
\mathbf{Z}	Shifter-Tensor in Referenzkonfiguration
A_0	Ungeschädigte Fläche
A_d	Geschädigte Fläche
d	Schädigungsvariable
$D[\cdot]$	Gateaux-Operator
F	Fließbedingung
F_S	Schädigungskriterium
g_c	Bruchzähigkeit
G_{ic}	Kritische Energiefreisetzungsrate
H	Sprungfunktion
H_0	Entfestigungsgesetz
h_I	Dicke der Zwischenschicht
I_i	Invarianten
J	Jakobideterminante
$L[\cdot]$	Linearisierung des Funktionals
m	Masse
$m^{\alpha\beta}$	Momente
N	Anzahl der Schichten
$n^{\alpha\beta}$	Membrankräfte
p^+, p^-	Gleichlast an Schalenoberfläche

$q(\alpha)$	Schädigungsschwelle
q^α	Querkräfte
W	Mechanische Arbeit
Y_0	Fließspannung
$d\mathbf{A}$	Differentielles Flächenelement in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{a}$	Differentielles Flächenelement in der Momentankonfiguration
$d\mathbf{V}$	Differentielles Volumen in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{v}$	Differentielles Volumen in der Momentankonfiguration
$d\mathbf{X}$	Linienelement in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Linienelement in der Momentankonfiguration

Literaturverzeichnis

- [1] ALLIX, O. ; CORIGLIANO, Alberto: Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), S. 2189–2216
- [2] ALLIX, O. ; LADEVÈZE, P.: Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. In: *Composite Structures* 22 (1992), Nr. 4, S. 235–242
- [3] ALLIX, O. ; LADEVÈZE, P. ; CORIGLIANO, A.: Damage analysis of interlaminar fracture specimens. In: *Composite Structures* 31 (1995), Nr. 1, S. 61–74
- [4] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 3. überarbeitete Auflage. Springer Vieweg, 2015
- [5] AREIAS, P. ; RABCUK, Timon ; CAMANHO, P. P.: Finite-strain laminates: Bending-enhanced hexahedron and delamination. In: *Composite Structures* 139 (2016), S. 277–290
- [6] ARGYRIS, J.: An excursion into large rotations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 32 (1982), Nr. 1, S. 85–155
- [7] BACH, C. von ; BAUMANN, R.: *Elastizität und Festigkeit: Die für die Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage*. 9. Auflage. Springer, 1924
- [8] BALZANI, C. ; WAGNER, W.: An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), S. 2597–2615
- [9] BATHE, K. J. ; ZIMMERMANN, P.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002

- [10] BAZELEY, G. P. ; CHEUNG, Y. K. ; IRONS, B. M. ; ZIENKIEWICZ, O. C.: Triangular elements in plate bending – conforming and nonconforming solutions. In: *Proceedings 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics* (1966)
- [11] BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K. ; MORAN, B. ; ELKHODARY, K. I.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Second edition. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons Inc, 2014
- [12] BISCHOFF, M. ; BLETZINGER, K.-U. ; WALL, W. A. ; RAMM, E.: Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures: 3. In: *Encyclopedia of Computational Mechanics*. American Cancer Society, 2004
- [13] BORST, R. de ; REMMERS, J. J. C.: Computational modelling of delamination. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), Nr. 6, S. 713–722
- [14] BRANK, B. ; CARRERA, E.: Multilayered shell finite element with interlaminar continuous shear stresses: A refinement of the Reissner–Mindlin formulation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 6, S. 843–874
- [15] BUECHTER, N. ; E., Ramm: Shell theory versus degeneration—a comparison in large rotation finite element analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 34 (1992), Nr. 1, S. 39–59
- [16] CAMANHO, P. ; DÁVILA, C.: Mixed-Mode Decohesion Finite Elements for the Simulation of Delamination in Composite Materials. In: *NASA/TM-2002-211737* (2002)
- [17] CAMANHO, P. P. ; DAVILA, C. G. ; MOURA, M. F. d.: Numerical Simulation of Mixed-Mode Progressive Delamination in Composite Materials. In: *Journal of Composite Materials* 37 (2003), Nr. 16, S. 1415–1438
- [18] CARRERA, E.: C0 Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), Nr. 11, S. 1797–1820
- [19] CARRERA, E.: Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. In: *Appl. Mech* 56 (2003), Nr. 3, S. 287–308

- [20] CARRERA, E.: Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells: A Unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 10 (2003), Nr. 3, S. 215–296
- [21] CARRERA, E. ; VALVANO, S. ; FILIPPI, M.: Classical, higher-order, zig-zag and variable kinematic shell elements for the analysis of composite multilayered structures. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 72 (2018), S. 97–110
- [22] CHAUDHURI, R. A.: An equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate. In: *Computers & Structures* 23 (1986), Nr. 2, S. 139–146
- [23] COENEN, E. W. C. ; KOUZNETSOVA, V. G. ; GEERS, M. G. D.: Computational homogenization for heterogeneous thin sheets. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), Nr. 8–9, S. 1180–1205
- [24] DADEJ, K. ; SUROWSKA, B.: Analysis of cohesive zone model parameters on response of glass-epoxy composite in mode II interlaminar fracture toughness test. In: *Composites Theory and Practice* 16 (2016), Nr. 3, S. 180–188
- [25] DVORKIN, E. ; BATHE, K.-J.: A Continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. In: *Engineering Computations* 1 (1984), S. 77–88
- [26] FAGIANO, C. ; ABDALLA, M. M. ; GÜRDAL, Z.: Interlaminar stress recovery of multilayer composite shell structures for three-dimensional finite elements. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 46 (2010), Nr. 12, S. 1122–1130
- [27] GROH, R.M.J. ; WEAVER, P. ; TESSLER, A.: Application of the Refined Zigzag Theory to the Modeling of Delaminations in Laminated Composites. In: *NASA/TM-2015-218808* (2015)
- [28] GRUTTMANN, F. ; KNUST, G. ; WAGNER, W.: Theory and numerics of layered shells with variationally embedded interlaminar stresses. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326 (2017), S. 713–738

- [29] GRUTTMANN, F. ; PHAM, V. D.: A finite element model for the analysis of buckling driven delaminations of thin films on rigid substrates. In: *Computational Mechanics* 41 (2008), Nr. 3, S. 361–370
- [30] GRUTTMANN, F. ; SAUER, R. ; WAGNER, W.: Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 12, S. 1675–1702
- [31] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: On the numerical analysis of local effects in composite structures. In: *Composite Structures* 29 (1994), Nr. 1, S. 1–12
- [32] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: Coupling of two- and three-dimensional composite shell elements in linear and non-linear applications. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129 (1996), Nr. 3, S. 271–287
- [33] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Bd. 2004. Karlsruhe, 2004
- [34] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: A stabilized one-point integrated quadrilateral Reissner–Mindlin plate element. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), Nr. 13, S. 2273–2295
- [35] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. In: *Computational Mechanics* 37 (2006), Nr. 6, S. 479–497
- [36] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: A coupled two-scale shell model with applications to layered structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 94 (2013), Nr. 13, S. 1233–1254
- [37] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: Shear correction factors for layered plates and shells. In: *Computational Mechanics* 59 (2016), 10
- [38] GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W. ; MEYER, L. ; WRIGGERS, P.: A nonlinear composite shell element with continuous interlaminar shear stresses. In: *Computational Mechanics* 13 (1993), Nr. 3, S. 175–188

- [39] HAN, S. ; BAUCHAU, O. A.: A novel, single-layer model for composite plates using local-global approach. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 60 (2016), S. 1–16
- [40] HELLINGER, E.: *Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua*. 1913
- [41] HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering*. Wiley, 2010
- [42] HU, H.-C.: On some Variational Principles in the Theory of Elasticity and Plasticity. In: *Acta Physica Sinica* 10 (1954), Nr. 3, S. 259
- [43] HU, X. F. ; CHEN, B. Y. ; TIRVAUDEY, M. ; TAN, V. B. C. ; TAY, T. E.: Integrated XFEM-CE analysis of delamination migration in multi-directional composite laminates. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 90 (2016), S. 161–173
- [44] HUGHES, T. J. R.: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Reprint. Mineola, NY : Dover, 2000
- [45] IRONS, B. M. ; ABDUR, R.: Experience with the Patch Test for Convergence of Finite Elements Method. (1972), 12, S. 557–587
- [46] KACHANOV, L. M.: Rupture Time Under Creep Conditions. In: *Otd. Tech. Nauk* 8 (1958), Nr. 1, S. 26–31
- [47] FEAP - KARLSRUHER INSTITUT OF TECHNOLOGY, INSTITUT FÜR BAUSTATIK: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*. 2019
- [48] FEAP , TAYLOR, R. L.: *FEAP – A Finite Element Analysis Program*. 2019 <http://projects.ce.berkeley.edu/feap/>
- [49] KIRCHHOFF, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850), S. 51–88
- [50] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Wiss.-Verlag, 1966
- [51] KLINKEL, S. ; GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures. In: *Computers & Structures* 71 (1999), Nr. 1, S. 43–62

- [52] KLINKEL, S. ; GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), Nr. 1, S. 179–201
- [53] KLINKEL, S. ; GRUTTMANN, F. ; WAGNER, W.: A mixed shell formulation accounting for thickness strains and finite strain 3d material models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74 (2007), Nr. 6, S. 945–970
- [54] KLINKEL, S. ; WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F.: Computational Techniques for Materials, Composites and Composite Structures. (2000), S. 297–310
- [55] KÖPPLE, M. ; WAGNER, W.: A mixed finite element model with enhanced zigzag kinematics for the non-linear analysis of multilayer plates. In: *Computational Mechanics* (2019)
- [56] KRÄTZIG, W. B. ; JUN, D.: Multi-layer multi-director concepts for D-adaptivity in shell theory. In: *Computers & Structures* 80 (2002), Nr. 9, S. 719–734
- [57] KRUEGER R.: Virtual crack closure technique: History, approach and applications. In: *Applied Mechanics* 57 (2004), Nr. 2, S. 109–143
- [58] KUBOKI, T. ; GALLAGHER, E. ; JAR, P.-Y. B. ; CHENG, J. J. R.: A New Method to Quantify Delamination Resistance of Fibre Reinforced Polymers (FRP) under Transverse Loading. In: *Applied Composite Materials* 12 (2005), Nr. 2, S. 93–108
- [59] KULIKOV, G. M. ; PLOTNIKOVA, S. V.: Advanced formulation for laminated composite shells: 3D stress analysis and rigid-body motions. In: *Composite Structures* 95 (2013), 236–246. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822312003480>
- [60] LARSSON, R.: A discontinuous shell-interface element for delamination analysis of laminated composite structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 30, S. 3173–3194
- [61] LOVE, A. E. H.: The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 179 (1888), S. 491–546

-
- [62] LU, X. ; CHEN, B.Y. ; TAN, V.B.C. ; TAY, T.E.: A separable cohesive element for modelling coupled failure in laminated composite materials. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 107 (2018), S. 387 – 398
- [63] LUBLINER, J.: *Plasticity theory*. New York : Dover Publications, 2008
- [64] MARIMUTHU, R. ; SUNDARESAN, M. K. ; RAO, G. V.: Estimation of inter-laminar stresses in laminated plates subjected to transverse loading using three-dimensional mixed finite element formulation. In: *Journal of the Institution of Engineers (India)* 84 (2003), S. 1–8
- [65] MI, Y. ; CRISFIELD, M. A. ; DAVIES, G. A. O. ; HELLWEG, H. B.: Progressive Delamination Using Interface Elements. In: *Journal of Composite Materials* 32 (1998), Nr. 14, S. 1246–1272
- [66] MINDLIN, R. D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. In: *Journal of Applied Mechanics*. 18 (1951), S. 31–38
- [67] MISES, R. V.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8 (1928), Nr. 3, S. 161–185
- [68] NAGHDI, P. M.: *The Theory of Shells and Plates*. 1973
- [69] NOOR, A. K. ; BURTON, W. S.: Predictor-corrector procedures for thermal buckling analysis of multilayered composite plates. In: *Computers & Structures* 40 (1991), Nr. 5, S. 1071–1084
- [70] NOOR, A. and Kim Y. ; PETERS, J. M.: Transverse shear stresses and their sensitivity coefficients in multilayered panels. In: *AIAA Journal* 32 (1994)
- [71] OGDEN, R. W.: *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Publications, 1997 (Dover Civil and Mechanical Engineering)
- [72] OLIVER, J. ; HUESPE, A. ; BLANCO, S. ; LINERO SEGRERA, D.: Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), 11, S. 7093–7114

- [73] OLIVER, J. ; HUESPE, A. E. ; CANTE, J. C.: An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), Nr. 21, S. 1865–1889
- [74] OLIVER, J. ; HUESPE, A.E. ; PULIDO, M.D.G. ; CHAVES, E.: From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), Nr. 2, S. 113 – 136
- [75] OLIVER, J. ; OLLER, S. ; CHAVES, E.: Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In: *Proceedings of SCI-C* (1990)
- [76] PIAN, T. H. H. ; SUMIHARA, K.: Rational approach for assumed stress finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20 (1984), Nr. 9, S. 1685–1695
- [77] RABOTNOV, Y. N.: Creep rupture. In: *Applied Mechanics* (1969), S. 342–349
- [78] RAMMERSTORFER, F. G. ; DORNINGER, K. ; STARLINGER, A.: Composite and Sandwich Shells. In: RAMMERSTORFER, F. G. (Hrsg.): *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*. Vienna : Springer Vienna, 1992, S. 131–194
- [79] REDDY, J. N.: A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 51 (1984), S. 745–752
- [80] REINOSO, J. ; PAGGI, M. ; BLÁZQUEZ, A.: A nonlinear finite thickness cohesive interface element for modeling delamination in fibre-reinforced composite laminates. In: *Composites Part B: Engineering* 109 (2016)
- [81] REISSNER, E.: On the Theory of Bending of Elastic Plates. In: *Journal of Mathematics and Physics* 23 (1944), Nr. 1-4, S. 184–191
- [82] REISSNER, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. In: *J. Appl. Mech.* (1945), S. A69–A77
- [83] REISSNER, E.: On Bending of Elastic Plates. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 5 (1947), Nr. 1, S. 55–68
- [84] REISSNER, E.: On a Variational Theorem in Elasticity. In: *Journal of Mathematics and Physics* 29 (1950), Nr. 1-4, S. 90–95

- [85] REMMERS, J. J. C. ; WELLS, G. N. ; BORST, R. de: A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), Nr. 13, S. 2013–2040
- [86] ROBBINS JR., D. H. ; REDDY, J. N.: Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), Nr. 4, S. 655–677
- [87] ROLFES, R. ; ROHWER, K. ; BALLERSTAEDT, M.: Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates. In: *Computers & Structures* 68 (1998), Nr. 6, S. 643–652
- [88] RYBICKI, E. F. ; KANNINEN, M. F.: A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. In: *Engineering Fracture Mechanics* 9 (1977), Nr. 4, S. 931–938
- [89] SCHELLEKENS, J. C. J. ; BORST, R. de: A non-linear finite element approach for the analysis of mode-I free edge delamination in composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), Nr. 9, S. 1239–1253
- [90] SCHÜRG, M.: *Forschungsbericht / Studienbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt*. Bd. Bd. 27: *Theoretical modeling and parallel programming of a nonlinear composite finite shell element based on a mixed global-local variational principle*: Zugl.: Darmstadt, Techn. Univ., Diss., 2012. Darmstadt : Techn. Univ. Studienbereich Mechanik, 2013
- [91] SCHÜRG, M. ; WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F.: An enhanced FSDT model for the calculation of interlaminar shear stresses in composite plate structures. In: *Computational Mechanics* 44 (2009), Nr. 6, S. 765–776
- [92] SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R.: *Interdisciplinary applied mathematics Mechanics and materials*. Bd. 7: *Computational inelasticity*. Corr. 2. print. Springer, 2000
- [93] SIMO, J.C. ; FOX, D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 72 (1989), Nr. 3, S. 267–304

- [94] SIMO, J.C. ; RIFAI, M.S. ; FOX, D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 81 (1990), Nr. 1, S. 91–126
- [95] SIMON, J.-W. ; HÖWER, D. ; STIER, B. ; REESE, S.: Meso-mechanically motivated modeling of layered fiber reinforced composites accounting for delamination. In: *Composite Structures* 122 (2015), S. 477–487
- [96] SIMON, J.-W. ; HÖWER, D. ; STIER, B. ; REESE, S. ; FISH, J.: A regularized orthotropic continuum damage model for layered composites: Intralaminar damage progression and delamination. In: *Computational Mechanics* 60 (2017), Nr. 3, S. 445–463
- [97] SOUZA NETO, E. A. d. ; PERIĆ, D. ; OWEN, D. R. J.: *Computational methods for plasticity: Theory and applications*. John Wiley & Sons, 2008
- [98] STIER, B. ; SIMON, J.-W. ; REESE, S.: Finite Element Analysis of Layered Fiber Composite Structures Accounting for the Material's Microstructure and Delamination. In: *Applied Composite Materials* 22 (2015), Nr. 2, S. 171–187
- [99] TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity*. 3. edition. McGraw-Hill book Company, 1970
- [100] TURON, A. ; CAMANHO, P. P. ; COSTA, J. ; RENART, J.: Accurate simulation of delamination growth under mixed-mode loading using cohesive elements: Definition of interlaminar strengths and elastic stiffness. In: *Composite Structures* 92 (2010), Nr. 8, S. 1857–1864
- [101] TURON, A. ; DÁVILA, C. ; CAMANHO, P. ; COSTA, J.: An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 74 (2007), S. 1665–1682
- [102] VIGUERAS, G. ; SKET, F. ; SAMANIEGO, C. ; WU, L. ; NOELS, L. ; TJAHJANTO, D. ; CASONI, E. ; HOUZEAUX, G. ; MAKRADE, A. ; MOLINA-ALDAREGUIA, J. M. ; VÁZQUEZ, M. ; JÉRUSALEM, A.: An XFEM/CZM implementation for massively parallel simulations of composites fracture. In: *Composite Structures* 125 (2015), S. 542–557

-
- [103] WAGNER, W. ; BALZANI, C.: *Mitteilung. Institut für Baustatik*. Bd. 2006: *Simulation of Delamination in Stringer Stiffened Fiber-Reinforced Composite Shells*. Karlsruhe, 2006
- [104] WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F.: A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64 (2005), Nr. 5, S. 635–666
- [105] WAGNER, W. ; GRUTTMANN, F. ; SPRENGER, W.: A finite element formulation for the simulation of propagating delaminations in layered composite structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), Nr. 11, S. 1337–1359
- [106] WASHIZU, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Elsevier Science & Technology, 1974 (01)
- [107] WIMMER, G. ; KITZMÜLLER, W. ; PINTER, G. ; WETTEMANN, T. ; PETTERMANN, H. E.: Computational and experimental investigation of delamination in L-shaped laminated composite components. In: *Engineering Fracture Mechanics* 76 (2009), Nr. 18, S. 2810–2820
- [108] WISNIEWSKI, K. ; WAGNER, W. ; TURSKA, E. ; GRUTTMANN, F.: Four-node Hu–Washizu elements based on skew coordinates and contravariant assumed strain. In: *Computers & Structures* 88 (2010), Nr. 21, S. 1278–1284
- [109] WRIGGERS, P.: *Nonlinear finite element methods*. Berlin : Springer, 2008
- [110] YAZDANI, S. ; RUST, W. J. H. ; WRIGGERS, P.: Delamination growth in composite laminates of variable stiffness. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 108 (2016), Nr. 11, S. 1406–1424
- [111] YAZDANI, S. ; RUST, W. J. H. ; WRIGGERS, P.: Delamination onset and growth in composite shells. In: *Computers & Structures* 195 (2018), S. 1–15
- [112] YUAN, Z. ; FISH, J.: Are the cohesive zone models necessary for delamination analysis? In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 310 (2016)

-
- [113] YUEN, S ; FAN, C ; KUBOKI, T ; JAR, P.-Y ; FOREST, T ; CHENG, J.J.: Delamination resistance of fibre-reinforced polymers (FRP) under transverse loading - Criteria for on-set of delamination. In: *Annual Technical Conference - ANTEC, Conference Proceedings 2* (2004), 01, S. 1374–1378
- [114] ZHAO, L. ; GONG, Y. ; ZHANG, J. ; CHEN, Y. ; FEI, B.: Simulation of delamination growth in multidirectional laminates under mode I and mixed mode I/II loadings using cohesive elements. In: *Composite Structures* 116 (2014), S. 509–522
- [115] ZHAO, L. ; ZHI, J. ; ZHANG, J. ; LIU, Z. ; HU, N.: XFEM simulation of delamination in composite laminates. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 80 (2016), S. 61–71
- [116] ZHEN, W. ; WANJI, C.: A global-local higher order theory including interlaminar stress continuity and C0 plate bending element for cross-ply laminated composite plates. In: *Computational Mechanics* 45 (2010), Nr. 5, S. 387–400
- [117] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; FOX, D. A.: *The finite element method for solid and structural mechanics*. 7th ed. Burlington : Elsevier Science, 2013
- [118] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L. ; ZHU, J. Z.: *The finite element method: Its basis and fundamentals*. 7th ed. Burlington : Elsevier Science, 2013